



**Titre:** Détection et isolation des fautes des systèmes à sauts markoviens  
Title:

**Auteur:** Kaoutar Akouz  
Author:

**Date:** 2004

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Akouz, K. (2004). Détection et isolation des fautes des systèmes à sauts markoviens [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/7328/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/7328/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:**  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

# NOTE TO USERS

This reproduction is the best copy available.

**UMI<sup>®</sup>**



UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

DÉTECTION ET ISOLATION DES FAUTES DES SYSTÈMES À SAUTS  
MARKOVIENS

KAOUTAR AKOUZ  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
DÉCEMBRE 2004



Library and  
Archives Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file    Votre référence*

*ISBN: 0-494-01271-4*

*Our file    Notre référence*

*ISBN: 0-494-01271-4*

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

DÉTECTION ET ISOLATION DES FAUTES DES SYSTÈMES À SAUTS  
MARKOVIENS

présenté par: AKOUZ kaoutar

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. BARON Luc, Ph.D., président

M. BOUKAS El-Kébir, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. KENNÉ Jean-Pierre, Ph.D., membre

À la mémoire de mon oncle  
à mes parents  
à mes frères

## REMERCIEMENTS

Je remercie mon directeur de recherche, M. Boukas, d'avoir accepté de diriger mes travaux de recherche, de m'avoir prodigué des conseils éclairés et pertinents, et d'avoir veillé à la finalisation de mon projet dans de bonnes conditions malgré ses lourdes responsabilités et ses engagements.

Je remercie le président de mon jury M. Baron ainsi que les autres membres M. Kenné et M. Masclé d'avoir accepté d'évaluer et de juger mon travail.

Je remercie mes parents dont le soutien et la patience ont été infaillibles malgré l'éloignement et la distance.

Je remercie toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à rendre agréable mon passage à l'École Polytechnique.



## RÉSUMÉ

Ce mémoire présente la technique d'application de la détection et de l'isolation de fautes aux systèmes linéaires à sauts markoviens. La plupart des processus en industrie manufacturière, aérospatiale et agroalimentaire, entre autres, ont la particularité de combiner à la fois des dynamiques continues et discrètes. On parle alors de systèmes hybrides dont une classe importante est celle des systèmes linéaires à sauts markoviens. En effet, ces systèmes passent d'un mode à un autre avec des taux de transition qui obéissent à une chaîne de Markov.

La sécurité et la fiabilité des systèmes industriels en général est un objectif crucial à atteindre. Ainsi, munir un système d'un moyen sûr et efficace pour détecter et localiser les fautes constitue la base de la théorie de détection et d'isolation de fautes (FDI). En outre, il paraît intéressant d'examiner cette question pour les systèmes linéaires à sauts markoviens.

La principale contribution de ce travail est de considérer ces systèmes pour des procédures de détection et d'isolation de fautes, notamment par filtrage  $H_\infty$  et par observation à entrée inconnue. Le choix de ces deux méthodes a été déterminé par le fait que le principal objectif de la détection et de l'isolation est de générer des résidus qui soient sensibles aux fautes et robustes aux perturbations.

En effet, par la méthode  $H_\infty$ , on estime le vecteur faute en minimisant l'effet de toutes les entrées inconnues et perturbations sur l'erreur d'estimation. L'estimée ainsi obtenue est prise comme étant le résidu qui de ce fait est plus sensible aux fautes. Les conditions d'existence et de stabilité d'un tel filtre sont formulées sous forme d'inégalités matricielles linéaires.

À ce point, la simple évaluation du résidu par rapport à un seuil de détection permet d'informer sur la présence ou non d'une faute; on parle de détection. En ce qui concerne l'isolation, on considère chacune des composantes du résidu que l'on compare à un seuil bien déterminé et on localise ainsi chacune des fautes. Les exemples numériques traités confirment ces concepts aussi bien dans le cas de systèmes avec des fautes sur des actionneurs ou des capteurs que pour ceux présentant des fautes dans les deux dispositifs à la fois.

Par ailleurs, l'observateur à entrée inconnue permet d'estimer l'état du système en formant une erreur d'estimation complètement découplée des perturbations et des entrées inconnues. Ainsi, dans le cas de détection et d'isolation de fautes, on forme un résidu qui est insensible aux bruits, aux perturbations et à toute autre entrée inconnue.

La détection de faute se fait donc de manière directe puisque le résidu reflète, surtout pour les capteurs, la présence ou non d'une faute. L'isolation avec cette méthode est basée sur la génération de résidus structurés qui se définissent comme étant sensibles aux fautes dans tous les actionneurs (capteurs) sauf un seul. L'évaluation des résidus obtenus aussi bien pour le cas de détection que d'isolation permet de savoir si une faute a eu lieu et de localiser exactement son emplacement. Les exemples considérés permettent d'illustrer l'évolution du résidu pour des systèmes avec des fautes sur les actionneurs ou les capteurs et de conclure quant au temps et au lieu exacts de la défectuosité.

Chacune de ces deux méthodes présente des avantages et des inconvénients. Mais, il reste que le type d'entrées agissant sur le système et la formulation des fautes sont des paramètres déterminants dans le choix de l'une ou l'autre de ces deux approches.

## ABSTRACT

The following work addresses the application of the fault detection and isolation (FDI) procedure to Markov jump linear systems (MJLS). Most of processes in nuclear, automotive, manufacturing, production engineering and agri-food industry are a combination of continuous and discrete dynamics known as hybrid systems. Markov jump linear systems as a special class of this family are characterized by their switching from a continuous mode to another according to a finite state Markov chain. Thus, when in a given mode, the system evolves exactly like a linear deterministic one. Many researchers from the mathematic community and more recently from control community are attracted by the study of such systems.

Indeed, the issue of reliability, operating safety and environmental protection in industrial processes is a crucial one. Consequently, providing the system with the ability to detect and locate the occurrence of a fault in running modes is the corner stone of FDI procedure. Considering industrial purposes it is desirable that such systems be reliable and that their running be the most efficient and safe possible. Thus, the monitoring of MJLS is an interesting area to explore.

Two main approaches are considered in this work; the first one considers the  $H_\infty$  filtering and the other one uses the unknown input observer (UIO).  $H_\infty$  approach consists in estimating the fault vector in MJL systems by minimizing the  $H_\infty$  norm of the estimation error. This is a way to build a residual that is robust to perturbations and sensitive to faults. The obtained conditions for the existence and the stability of such a filter are expressed in linear matrix inequalities (LMI) form.

-Most of the time, the residual evaluation is done via the definition of a detection threshold beyond which an alarm signal is set off. For detection issue, the compar-

ison of the residual norm to the threshold over a detection interval is enough to deduce the existence of a fault. In the case of isolation each fault vector estimate component is considered as a partial residual to be compared to a threshold. If a fault has occurred in a given device the corresponding residual is different from zero otherwise the residual is null. The considered numerical examples either for the case of detection or isolation show that the fault vector is well estimated and that the time and origin of each fault are precisely identified.

The second approach is based on using an unknown input observer for the fault detection and isolation issue. In fact, the unknown input observer (UIO) is an observer that allows the estimated state to approach asymptotically the real state of the system while rejecting perturbation and noise that are considered as unknown inputs. Consequently, the advantages it gives to observe the system state (thus the output) and to generate a residual completely decoupled from unknown entries allows to handle the problem of fault detection in a straightforward manner. The isolation problem which is more complicated can be suitably overcome by the use of observers sensitive to all faults but one. Residual evaluation is accomplished by comparing the norm of the generated residual to a threshold for fault detection and by examining some regressive residual quantities over a detection interval in case of fault isolation. Through the following work, conditions and details about the application of unknown input observers to FDI in Markovian jump linear systems are set. The considered numerical examples show satisfactory results for fault detection and isolation in sensors as well as in actuators.

Both approaches have advantages and drawbacks. However, the chosen real system model and the knowledge of the interacting entries is determinant to the adequate procedure choice.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iv
REMERCIEMENTS . . . . .	v
RÉSUMÉ . . . . .	vi
ABSTRACT . . . . .	viii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	x
LISTE DES FIGURES . . . . .	xiii
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES . . . . .	xv
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xvi
CHAPITRE 1 INTRODUCTION ET RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE	1
1.1 Principes de base de la détection et de l'isolation de fautes . . . . .	1
1.2 Survol de la littérature . . . . .	6
1.3 Plan du mémoire . . . . .	13
CHAPITRE 2 FORMULATION DU PROBLÈME . . . . .	15
2.1 Notion de systèmes hybrides . . . . .	15
2.2 Position du problème . . . . .	16
2.2.1 Exemple pratique . . . . .	16
2.3 Méthodologies proposées . . . . .	22
CHAPITRE 3 DÉTECTION ET ISOLATION DE FAUTES DANS LES SYSTÈMES LINÉAIRES À SAUTS MARKOVIENS PAR	

L'APPROCHE $H_\infty$ . . . . .	24
3.1 Outils mathématiques et généralités . . . . .	24
3.1.1 Types de fautes . . . . .	24
3.1.2 Complément de Schur . . . . .	26
3.1.3 Stabilité stochastique . . . . .	27
3.2 Position du problème . . . . .	28
3.3 Détection et isolation de fautes par l'approche $H_\infty$ . . . . .	31
3.3.1 Générateur de résidu . . . . .	31
3.4 Évaluation du résidu . . . . .	41
3.4.1 Détection de faute . . . . .	41
3.4.2 Exemple numérique de détection : cas d'une faute dans l'action- neur . . . . .	42
3.4.3 Isolation de faute dans les capteurs ou les actionneurs . . . .	46
3.4.4 Exemple numérique d'isolation : cas de fautes sur deux cap- teurs . . . . .	47
3.4.5 Isolation de faute dans des capteurs et des actionneurs . . . .	52
3.4.6 Exemple numérique d'isolation : cas de fautes sur un capteur et un actionneur . . . . .	53
3.4.7 Exemple numérique d'isolation : cas de fautes sur deux cap- teurs et un actionneur . . . . .	58
3.5 Conclusion . . . . .	63
CHAPITRE 4 DÉTECTION ET ISOLATION DE FAUTES DANS LES SYSTÈMES LINÉAIRES À SAUTS MARKOVIENS PAR L'OBSERVATEUR À ENTRÉE INCONNUE . . . . .	64
4.1 Détection de fautes par un observateur et un estimateur d'état . . .	64
4.2 Position du problème . . . . .	66
4.3 Détection et isolation de faute par un observateur à entrée inconnue	69
4.3.1 Détection de faute . . . . .	74

4.3.1.1	Évaluation du résidu . . . . .	75
4.3.1.2	Exemple numérique de détection : cas de fautes sur les capteurs . . . . .	77
4.3.2	Isolation de fautes . . . . .	81
4.3.2.1	Isolation de fautes dans les capteurs . . . . .	81
4.3.2.2	Isolation de fautes dans les actionneurs . . . . .	83
4.3.3	Évaluation du résidu . . . . .	85
4.3.3.1	Exemples numériques d'isolation : cas de fautes sur les capteurs . . . . .	86
4.3.3.2	Exemple numérique d'isolation : cas de fautes sur les actionneurs . . . . .	97
4.4	Conclusion . . . . .	104
CHAPITRE 5 BILAN ET COMPARAISON DES RÉSULTATS DES DEUX APPROCHES . . . . . 105		
5.1	Détection de fautes . . . . .	105
5.1.1	Formulation de la faute dans le modèle du système défectueux	105
5.1.2	Sensibilité du résidu à la faute . . . . .	106
5.1.3	Évaluation du résidu . . . . .	109
5.2	Isolation de fautes . . . . .	110
5.2.1	Formulation de la faute dans le modèle du système défectueux	110
5.2.2	Évaluation du résidu . . . . .	110
5.3	Conclusion . . . . .	111
CHAPITRE 6 CONCLUSION ET EXTENSIONS POSSIBLES . . . . . 112		
RÉFÉRENCES . . . . . 116		
ANNEXES . . . . . 123		

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Système de supervision (Cordier, 1998) . . . . .	2
Figure 1.2	Comparaison entre redondance matérielle et analytique (Simani, 1999) . . . . .	4
Figure 1.3	Détection basée sur le modèle (Isermann, 1997) . . . . .	7
Figure 2.1	Norme du résidu . . . . .	21
Figure 3.1	Dépendance temporelle des fautes . . . . .	25
Figure 3.2	Influence additive et multiplicative des fautes . . . . .	26
Figure 3.3	Filtre proposé pour la détection et l'isolation de fautes . . .	30
Figure 3.4	Reconfiguration du filtre pour la détection et l'isolation de fautes . . . . .	32
Figure 3.5	Faute réelle affectant le système . . . . .	44
Figure 3.6	Détection d'une seule faute . . . . .	46
Figure 3.7	Détection et isolation de faute dans le capteur 1 . . . . .	51
Figure 3.8	Détection et isolation de faute dans le capteur 2 . . . . .	51
Figure 3.9	Détection et isolation de faute dans l'actionneur . . . . .	57
Figure 3.10	Détection et isolation de faute dans le capteur . . . . .	57
Figure 3.11	Détection et isolation de faute dans l'actionneur . . . . .	62
Figure 3.12	Détection et isolation de faute dans le capteur 1 . . . . .	62
Figure 3.13	Détection et isolation de faute dans le capteur 2 . . . . .	63
Figure 4.1	Observateur à entrée inconnue (Chen, 1999) . . . . .	69
Figure 4.2	Détection d'une faute via UIO . . . . .	80
Figure 4.3	Détection et isolation de faute dans les capteurs - UIO-1 . .	93
Figure 4.4	Détection et isolation de faute dans les capteurs - UIO-2 . .	93
Figure 4.5	Détection et isolation de faute dans les capteurs - UIO-3 . .	94
Figure 4.6	Détection et isolation de faute dans le capteur 2 - UIO-1 . .	95
Figure 4.7	Détection et isolation de faute dans le capteur 2 - UIO-2 . .	96



Figure 4.8	Détection et isolation de faute dans le capteur 2 - UIO-3 . .	96
Figure 4.9	Détection et isolation de faute dans l'actionneur - UIO-1 . .	103
Figure 4.10	Détection et isolation de faute dans l'actionneur - UIO-2 . .	103
Figure 4.11	Détection et isolation de faute dans l'actionneur - UIO-3 . .	104
Figure 5.1	Détection d'une faute par filtrage $H_\infty$ . . . . .	108
Figure 5.2	Détection d'une faute par un observateur à entrée inconnue-1	108
Figure 5.3	Détection d'une faute par un observateur à entrée inconnue-2	109

## LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

$S$ :	espace des modes, $S = \{1, 2, \dots, N\}$ avec $N$ un nombre entier naturel positif
$x(t)$ :	vecteur d'état à l'instant $t$
$y(t)$ :	sortie à l'instant $t$
$u(t)$ :	vecteur de commande à l'instant $t$
$w(t)$ :	vecteur de perturbation à l'instant $t$
$f(t)$ :	vecteur fautes à l'instant $t$
$I$ :	matrice identité
$A$ :	matrice d'état
$B$ :	matrice d'entrée
$s(t)$ :	mode du système à l'instant $t$
$\lambda_{ij}$ :	taux de transition du mode $i$ au mode $j$ , ( $i, j \in S$ )
$E\{.\}$ :	espérance mathématique
$\ \cdot\ _2$ :	norme 2
$\ \cdot\ _\infty$ :	norme $\infty$
$P > 0$ :	matrice symétrique définie positive
$\dot{V}(\cdot)$ :	dérivée de la fonction de Lyapunov par rapport au temps $t$
$FDI$ :	Fault Detection and Isolation
$LMI$ :	Linear Matrix Inequality
$MJLS$ :	Markov Jump Linear System
$UIO$ :	Unknown Input Observer

## LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	STABILITÉ STOCHASTIQUE . . . . .	123
I.1	Démonstration du théorème 3.1 . . . . .	123

## CHAPITRE 1

### INTRODUCTION ET RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

On introduit ici les principes de base de la *détection* et de l'*isolation* de *fautes* dans les procédés. On effectue également un bref passage en revue des principaux travaux de recherche réalisés dans ce domaine.

#### 1.1 Principes de base de la détection et de l'isolation de fautes

Il est bien rare qu'un dispositif, aussi performant et sophistiqué soit-il, ne présente une défaillance ou un dysfonctionnement. Quand faisant partie d'un système complexe, ce composant défectueux peut perturber significativement, à cours ou à moyen terme, l'exécution des tâches attendues. Ceci entraîne un changement de performance indésirable du mode opératoire du système. Les conséquences en temps, en coûts, en environnement, voire même en vies humaines peuvent être désastreuses. En effet, les cas de Chernobyl en 1986 avec l'explosion d'un réacteur nucléaire et d'Ariane 5 en 1996 avec une unité de référence inertielle qui transmettait des données erronées n'en sont que des exemples (Mahmoud, 2001b). On dit qu'on est en présence d'une *faute* par opposition à une *panne* qui elle dénote une rupture accidentelle et permanente du fonctionnement. Ainsi, une *faute* se définit comme une déviation du comportement du système de son état normal ou souhaité. Plus de détails quant à la nature d'une *faute*, à sa durée et à son influence seront donnés au chapitre 3.

La supervision d'un système (Figure 1.1) s'impose donc, a priori, comme un outil

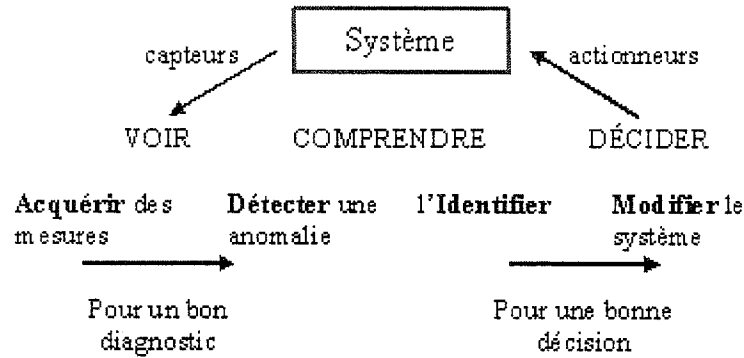


Figure 1.1 Système de supervision (Cordier, 1998)

de *diagnostic* des erreurs qui peuvent affecter ses composants. En effet, il est important de prévenir les scénarios catastrophes en prenant connaissance à temps de toute défectuosité dans le matériel et en déterminant son origine. Par la suite, un bilan de l'importance et de l'impact de la *faute* sur la marche du système permet à l'opérateur d'opter pour une intervention d'urgence ou pour la modification du programme de maintenance à plus long terme. Donc, au delà du *diagnostic* de *fautes*, un système de supervision consiste à contrôler des processus industriels dans des conditions normales ainsi qu'en présence de *fautes*, et ce par la *prise de décision* puis l'*action* suite au *diagnostic*. On améliore ainsi la fiabilité puisque les tâches peuvent être accomplies malgré la présence de *fautes*. On améliore aussi la maintenabilité par l'utilisation de procédures de réparation plus simples et moins fréquentes. Le système devient plus sécuritaire puisqu'opérant sans exposer les individus à un danger, et ce même lorsque la tâche n'est pas complétée.

D'un point de vue pratique, que ce soit en aérospatial, en marine, en avionique ou dans tout autre secteur industriel, la recherche de performance, de sécurité et de fiabilité exige le développement et l'implantation de systèmes *automatisés* de *dia-*

*gnostic* de *fautes* voire de supervision. Ceci est rendu possible grâce aux énormes progrès de l'informatique, de la micro-électronique et de l'automatique entre autres.

Bien que faisant l'objet d'un intérêt croissant dans le domaine de la recherche, le concept de *diagnostic* de *fautes*, tel que cité dans la littérature (Chen, 1999), (Gertler, 1988) ne date que des années 70. Ceci en fait un champ de recherche relativement récent comparé à d'autres; plus particulièrement le contrôle. La définition conventionnelle du *diagnostic* de *fautes* dans un procédé consiste en trois principales étapes :

- *Détection de faute* : permet d'informer sur la présence d'une *faute* dans le système le plus rapidement possible.  
*Exemple* : un voyant de température d'eau s'allume dans un véhicule automobile lorsqu'il *détecte* une défaillance.
- *Isolation de faute* : permet de localiser et d'isoler la *faute* en vue de l'extraire.  
*Exemple* : observer qu'une pompe à eau ne tourne pas revient à localiser la défaillance.
- *Identification de faute* : permet d'estimer l'amplitude de la *faute* et de la reconstruire.

Néanmoins, lorsqu'aucun objectif de reconfiguration ni de contrôle en vue d'atténuer l'impact des *fautes* n'est fixé, l'étape d'*identification* de *fautes* n'est pas considérée. On distingue deux groupes importants de méthodes de *détection* et d'*isolation* de *fautes* (Chen, 1999), (Gertler, 1988) : celui utilisant *la redondance matérielle* et celui basé sur *la redondance analytique*.

L'approche par *redondance matérielle* consiste à comparer les sorties de plusieurs capteurs identiques qui mesurent une variable spécifique et de conclure quant à la consistance du matériel par recoupements d'information. C'est une méthode très fiable, facilement réalisable en pratique mais elle engendre des coûts additionnels en équipements, en espace et en maintenance.

Dans l'approche par *redondance analytique*, on considère d'abord les méthodes utilisant le modèle, qui peut être analytique ou bien de connaissance. Lorsque le système est trop complexe pour en extraire le modèle, on opte plutôt pour des techniques faisant intervenir les données en l'occurrence celles basées sur les réseaux de Petri, la logique floue ou encore les réseaux de neurones (Terra, 2001), (Campa, 2002). En effet, l'extraction de l'information et son traitement, par ce type de systèmes experts, permettent de renseigner sur la présence de *fautes* d'une manière qu'un simple observateur humain ne peut appréhender.

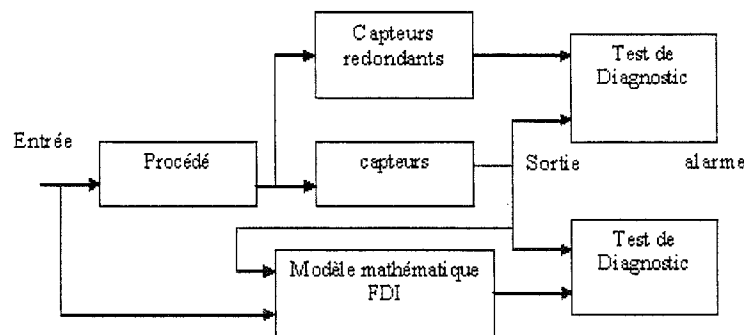


Figure 1.2 Comparaison entre redondance matérielle et analytique (Simani, 1999)

On formule alors la différence entre la mesure et la valeur référence obtenue via le modèle ou la structure de données durant le fonctionnement normal, d'une variable choisie. Cette différence ainsi calculée est appelée *résidu*. L'approche par *redondance analytique* offre l'avantage de ne pas nécessiter de capteurs addition-

nels pour les mesures. De plus, les progrès notables en informatique facilitent considérablement l'implémentation de cette méthode (Chen, 1999).

La génération de *résidus* est fondamentale dans le processus de *détection* et d'*isolation* de *fautes*. En effet, idéalement, le *résidu* devrait être égal à zéro en absence de *fautes* et sa valeur devrait être non nulle si une *faute* a lieu. Néanmoins, un système réel est le plus souvent sujet à des bruits, des perturbations et/ou des entrées inconnues. Il est parfois difficile de distinguer entre l'effet des *fautes* et celui de ces entrées.

Afin de résoudre ce problème, il est nécessaire de réduire autant que possible l'effet de toutes les entrées sans intérêt sur le *résidu* et de rendre ce dernier très sensible à la *faute* qu'on veut détecter ou isoler. Ce problème n'est pas toujours des plus aisés à traiter et plus précisément quand il s'agit d'*isolation* de *fautes* (Chen, 1996).

Lorsqu'en plus, des incertitudes sur le modèle existent, on se retrouve alors devant un problème de robustesse. L'idée est similaire au cas d'entrées indésirables ou inconnues, il s'agit de rendre le *résidu* robuste aux incertitudes tout en maintenant une certaine sensibilité aux *fautes* (Frank, 1997), (Rambeaux, 2000), (Sadrnia, 1995), (Shen, 1998), (Tan, 2003), (Zhengang, 2004). L'importance de la robustesse a été prouvée tant en recherche qu'en industrie et plusieurs méthodes ont été proposées dans ce cadre, comme par exemple l'observateur à entrée inconnue qui assure le découplage de l'erreur d'estimation d'état du système de toute perturbation considérée comme entrée inconnue. Néanmoins, en *détection* et *isolation* de *fautes*, il n'est pas nécessaire de découpler tant l'erreur d'estimation d'état que le *résidu* de l'effet des perturbations (Patton, 2000). Ainsi, pour réaliser le découplage du



*résidu*, on affecte des vecteurs propres de l'observateur à des directions orthogonales à celles des perturbations, c'est l'assignation par structure modale.

Une fois le *résidu* calculé, il devrait être évalué pour pouvoir en conclure l'existence ou non d'une *faute*. Souvent, cette évaluation est réalisée en comparant le *résidu* à un *seuil de détection* calculé à partir du *résidu* exprimé en conditions idéales (sans *fautes*). Il indique ainsi la *faute* minimale tolérable par le système, au-delà de laquelle une alarme est déclenchée. Par ailleurs, il arrive qu'on utilise des moyennes mobiles des *résidus* ou bien des méthodes statistiques pour l'évaluation (Chen, 1999).

## 1.2 Survol de la littérature

Des scientifiques en général, et plus particulièrement des automaticiens, se sont intéressés à la *détection* et l'*isolation* de *fautes* dans les procédés. De nombreuses méthodes basées sur le modèle (Figure 1.3) ont été développées et appliquées.

Parmi ces méthodes, les plus utilisées sont celles basées sur :

- L'espace de parité dont le principe est de former un vecteur de parité à partir de la projection du vecteur de sorties sur le sous-espace observable d'un capteur  $j$ . Selon que le vecteur obtenu est nul ou pas, on est informé sur l'absence ou la présence d'une *faute* (Chan, 2001), (Campa, 2002), (Chow, 1984), (Ding, 1999), (Gertler, 1988), (Gertler, 1995), (Medvedev, 1995), (Staroswiecki, 2001).
- L'identification de paramètres où l'on suppose que les *fautes* agissent sur

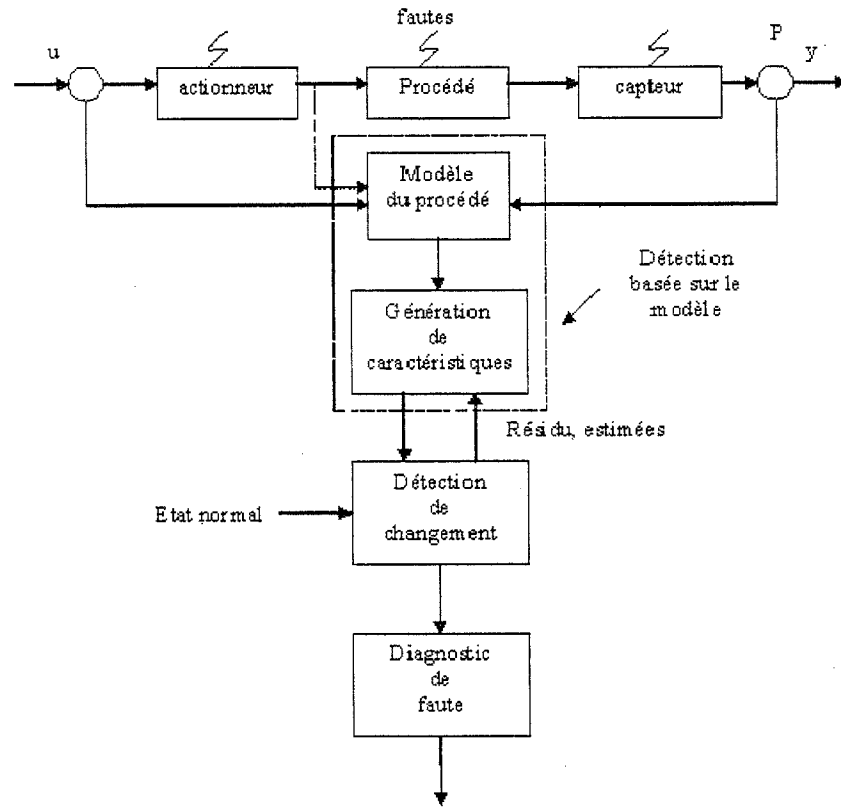


Figure 1.3 Détection basée sur le modèle (Isermann, 1997)

les coefficients physiques du système. Initialement, le procédé sans *fautes* est identifié puis pris comme référence. Les paramètres du système réel sont ensuite estimés répétitivement en ligne et comparés aux paramètres références produisant ainsi des *résidus* qui informent sur la présence ou non d'une *faute* (Gertler, 1988), (Gertler, 2002), (Isermann, 1984).

- Les observateurs de *fautes* qui permettent de former des *résidus* à partir des sorties mesurées et celles estimées (Gertler, 2002), (Keller, 1998), (Patton, 1997), (Rambeaux, 2000), (Saber, 2000), (Tan, 2003), (Terra, 2001), (Yang, 1998).
- Les filtres de détection de *fautes* qui constituent une classe particulière d'obser-

-vateurs pouvant générer des résidus ayant des propriétés unidirectionnelles associées à des directions connues des *fautes* (Bokor, 2004), (Chen, 1996), (Chen, 2003), (Edelmayer, 1997), (Gertler, 1995), (Zhong, 2003).

- Les filtres de Kalman qui sont utilisés surtout dans le cas de systèmes stochastiques. En effet, pour des systèmes linéaires gaussiens, les états sont estimés en utilisant des filtres de Kalman. Lorsqu'on traite de la *détection* et de l'*isolation* de *fautes*, l'innovation obtenue est considérée comme étant le signal résiduel. Sachant qu'en fonctionnement normal, l'innovation est de moyenne gaussienne nulle, le processus de *détection* est basé sur la méthode du taux de vraisemblance (Keller, 1995), (Willsky, 1976).

Il est à noter que les techniques les plus fréquemment utilisées sont celles basées sur les observateurs et l'estimation des paramètres (Simani, 1999). Les quatre premières catégories citées sont déterministes tandis que la dernière, elle, est stochastique. Ces méthodes ont été intensivement appliquées à des systèmes linéaires, non linéaires, bilinéaires, déterministes et stochastiques :

- **Linéaires** : dans (Chow, 1984), le système considéré est linéaire discret et des relations de redondance analytique sont utilisées pour la génération de *résidus*. Ding et al. (Ding, 1999) s'intéressent à la relation entre l'ordre d'une relation de parité et la dimension de l'espace de parité pour des systèmes linéaires discrets. Ils caractérisent ainsi les vecteurs de parité et étudient le problème de robustesse en *détection* et *isolation* de *fautes*. Dans (Edelmayer, 2002), des filtres de *détection* sont conçus, par optimisation, pour être sensibles aux *fautes* dans des systèmes linéaires invariants sujets à des *fautes* simultanées et à des perturbations. (Gertler, 1995) considère un système linéaire discret sujet à des *fautes* sur les entrées et les mesures.

Il est alors prouvé qu'en utilisant des relations de parité dynamiques, il est possible d'extraire des *résidus* avec des propriétés directionnelles bien spécifiques. Cette approche se révèle plus directe lorsqu'elle est comparée à celle utilisant les détecteurs de *fautes*. Dans (Medvedev, 1995), la *détection* et l'*isolation* de *fautes* par la méthode de l'espace de parité est utilisée pour le cas de systèmes linéaires continus. (Niemann, 1999) s'intéresse à la *détection* et l'*isolation* de *fautes* dans les systèmes linéaires discrets et continus par l'intermédiaire d'un *seuil* de *détection* nul ou presque nul. (Patton, 1995) exprime la dualité entre le problème de contrôle et celui de l'estimation par l'approche  $H_\infty$ . La solution de l'estimation  $H_\infty$  est ensuite formulée sous forme d'inégalité matricielle linéaire. Le degré de liberté contenu dans cette solution est utilisé pour améliorer la robustesse de l'observateur  $H_\infty$  de *détection* de *fautes*. Dans (Patton, 1997), on applique l'observateur à entrée inconnue à un système linéaire continu dans le temps. Patton et al. montrent sur des applications réelles; comment les techniques de robustesse doivent être utilisées. Dans (Patton, 2000), les principes de base de l'approche par assignation par structure modale pour la *détection* de *fautes* robuste dans des systèmes linéaires continus sont présentés. L'assignation par structure modale est étendue aux vecteurs propres à droite et les conditions d'existence sont établies. Dans (Saber, 2000), on traite des problèmes fondamentaux de *détection* et d'identification de *fautes* dans les systèmes linéaires continus et discrets. Dans (Sauter, 1999), des filtres de *détection* et d'*isolation* de *fautes* optimaux sont construits pour des systèmes linéaires continus; par la génération de *résidus* directionnels. Les filtres de *détection* résultants permettent de maximiser l'effet des *fautes* et de minimiser celui des perturbations. (Zhong, 2002) présente un observateur de *fautes* robuste pour des systèmes linéaires invariants par la séparation de l'état du système en une partie affectant le procédé et une autre correspondant à la *faute*. Le

design de l'observateur est ensuite basé sur l'expression de deux objectifs d'optimisation  $H_\infty$  utilisant les inégalités matricielles linéaires.

- **Non linéaires** : dans (Basseville, 1998), pour la supervision de systèmes non linéaires, on utilise une représentation entrée-sortie ainsi qu'une approche locale pour la *détection* de changements. La représentation entrée-sortie est obtenue par l'élimination des variables inconnues dans le système supervisé. (Besançon, 2003) propose une technique  $H_\infty$  non linéaire pour l'estimation d'état dans les systèmes non linéaires et plus particulièrement la *détection* et *l'isolation* de *fautes* robuste par l'atténuation des perturbations. (Bokor, 2004) permet d'étendre l'approche par filtre de *détection* aux systèmes linéaires à paramètres variants. Ce type de représentation donne la possibilité de traiter des systèmes non linéaires comme s'ils étaient parfaitement linéaires. Dans (Gertler, 2002), l'extension de plusieurs méthodes de *détection* de *fautes* dédiées aux systèmes linéaires est démontrée pour des systèmes non linéaires. (Hammouri, 1999) étend l'approche basée sur l'existence d'une solution au problème fondamental de génération de *résidu*, aux systèmes non linéaires. Dans (Staroswiecki, 2001), il s'agit d'étendre la méthode de redondance analytique pour la *détection* et *l'isolation* de *fautes* à des systèmes non linéaires modélisés par des équations algébriques différentielles polynomiales. Zhang et al. (Zhang, 1998) appliquent l'approche locale à la *détection* de changements dans la représentation entrée-sortie du système supervisé pour la génération et l'évaluation de *résidus*. Les systèmes considérés sont non linéaires et modélisés par des équations algébriques différentielles polynomiales.
- **Bilinéaires** : dans (Hammouri, 2001), une généralisation aux systèmes bilinéaires du problème fondamental de génération de *résidu* est effectuée. Une nouvelle approche utilisant des générateurs de *résidus* bilinéaires est traitée.

- **Déterministes** : la plupart des systèmes considérés antérieurement sont déterministes, à titre d'exemple on cite (Darkhovski, 2003), où l'on considère un système déterministe avec des observations aléatoires. Une approche de *détection* et d'*isolation* de *fautes*, qui n'est ni géométrique ni statistique, est proposée. Au fait, le problème de décision optimale est formulé comme un jeu théorique ne nécessitant pas de découplage des perturbations et qui fournit des résultats optimaux.
- **Stochastiques** : dans (Keller, 1995), on étend le test par taux de vraisemblance généralisé au cas d'un système linéaire stochastique discret avec des entrées inconnues. (Keller, 1998) propose une nouvelle méthode de filtrage d'état pour la *détection* et l'*isolation* de *fautes* multiples qui ont lieu simultanément ou subséquentiellement dans des systèmes linéaires stochastiques discrets. Dans (Willsky, 1976), il s'agit de modéliser des procédés sujets à des *fautes* par des systèmes linéaires stochastiques avec des sauts aléatoires de la variable d'état, d'amplitudes inconnues. En utilisant le filtrage de Kalman et les techniques de taux de vraisemblance, on peut concevoir un filtre adaptatif pour la *détection* et l'estimation de ces sauts.
- **Incertaines** : des systèmes avec des erreurs sur le modèle et des incertitudes sont considérés dans (Frank, 1997) et plusieurs méthodes basées sur l'observateur sont utilisées pour la *détection* et l'*isolation* de *fautes* dans ce type de procédés. (Rambeaux, 2000) propose une méthode de *détection* et d'*isolation* de *fautes* pour des systèmes incertains comportant des entrées inconnues. La génération de *résidu* est faite à partir du modèle nominal et de la conception d'un observateur de sortie  $H_\infty$  paramétré. L'évaluation du *résidu* est ensuite basée sur la détermination d'un *seuil* de *détection* optimal dépendant des conditions de fonctionnement. La prise en compte de la robustesse aux perturbations et la sensibilité aux *fautes* est exposée dans

(Sadria, 1995) pour des systèmes présentant des incertitudes telles que des erreurs sur les paramètres ou des dynamiques non modélisées dans les actionneurs et les capteurs. La méthode est basée sur la conception d'un observateur de *détection de fautes*  $H_\infty/\mu$  robuste. (Shen, 1998) construit un observateur d'*isolation de fautes* à entrées inconnues utilisant l'assignation par structure modale pour aboutir à une *isolation* robuste des *fautes* dans des systèmes avec des incertitudes structurées et non structurées. (Tan, 2003) décrit une méthode de design d'observateurs à modes glissants, pour la *détection* et la reconstruction de *fautes* dans les actionneurs et les capteurs, qui sont robustes aux incertitudes. (Zhengang, 2004) présente un nouveau schéma de *détection* et d'*isolation de fautes* dans les actionneurs et les capteurs pour des systèmes linéaires multivariés en présence d'incertitudes en se basant sur la méthode de Chow-Willsky (Chow, 1984). Dans (Zhong, 2002), (Zhong, 2003) le problème de *détection* et d'*isolation de fautes* est considéré pour un système linéaire invariant incertain avec des erreurs sur le modèle et des entrées inconnues. L'idée est d'utiliser un générateur de *résidu* optimal (sans erreurs) comme un modèle de *résidu* référence pour la conception du filtre de *détection* et d'*isolation de fautes* robuste pour des systèmes linéaires invariants incertains avec des erreurs de modélisation. On formule ainsi le filtre de *détection* par le moyen d'une correspondance de modèle  $H_\infty$ .

Certains auteurs ont représenté les changements brusques engendrés par les *fautes* dans les systèmes, par des modèles linéaires à sauts. Tze-Thong et Milton (Tze-Thong, 1976) ont modélisé les erreurs dans les capteurs par des processus de Gauss-Markov, les modes dégradés étant représentés par des sauts. Willsky et Jones (Willsky, 1976) considèrent des systèmes discrets avec des sauts aléatoires à détecter. Plus récemment, Mahmoud (Mahmoud, 2001a) décrit les systèmes de tolérance de *fautes* actifs par des équations différentielles linéaires stochastiques avec des

paramètres variant aléatoirement. Cette variation aléatoire est due aux *fautes* et est supposée avoir des caractéristiques de transition markoviennes.

### 1.3 Plan du mémoire

Le présent mémoire est organisé comme suit :

Le **chapitre 2** permet de formuler le problème de *détection* et d'*isolation* de *fautes* dans les systèmes linéaires à sauts markoviens. On y explique aussi les motivations pour le choix de la méthode de filtrage  $H_\infty$  (Boukas, 2004) et de celle de l'observation à entrée inconnue pour résoudre cette problématique.

Le **chapitre 3** expose et détaille la procédure de *détection* et d'*isolation* de *fautes* par le filtrage  $H_\infty$  (Boukas, 2004). Les conditions d'existence et de stabilité d'un tel filtre sont exprimées sous forme d'inégalités matricielles linéaires. Des exemples numériques y sont illustrés pour vérifier les concepts et théories présentés.

Le **chapitre 4** s'intéresse à la conception d'observateurs à entrées inconnues pour la *détection* et l'*isolation* de *fautes* dans les systèmes linéaires à sauts markoviens. Des exemples numériques permettent de traiter les cas de fautes simples ou multiples sur des actionneurs ou des capteurs.

Le **chapitre 5** fait le bilan des résultats des deux approches considérées et en ressort des critères de comparaison pour la *détection* et l'*isolation* de *fautes*.



**Le chapitre 6** constitue la conclusion des travaux de ce mémoire. Un aperçu de ce qui a été réalisé et des résultats obtenus y sont exposés. On y parle aussi des limitations que présentent certains aspects des concepts établis et des perspectives de recherche à considérer.

## CHAPITRE 2

### FORMULATION DU PROBLÈME

Dans ce chapitre, on présente la problématique ainsi que les motivations pour le choix des méthodologies adoptées par la suite.

#### 2.1 Notion de systèmes hybrides

La majorité des processus nucléaires, chimiques, agroalimentaires, automobiles, aéronautiques, manufacturiers et de production présentent à la fois des dynamiques continues et discrètes qui interagissent entre elles. On dit qu'ils constituent des systèmes hybrides (Mahmoud, 2001a). Une classe particulière en est la famille des systèmes linéaires à sauts markoviens qui se définissent comme des systèmes continus sautant d'un état linéaire vers un autre selon une chaîne de Markov à états finis.

Ainsi, une fois dans un mode, le système évolue de la même manière qu'un système linéaire déterministe. Plusieurs mathématiciens et plus récemment des automaticiens se sont penchés sur l'étude de ces systèmes. En l'occurrence, les principaux aspects explorés par Boukas (Boukas, 2004), (Boukas, 2002) pour les systèmes linéaires à sauts markoviens sont :

- la stabilité stochastique;
- la stabilisabilité stochastique;
- le problème de contrôle  $H_\infty$ ;

- le problème de filtrage.

## 2.2 Position du problème

Dans une boucle de commande, des *fautes* peuvent s'introduire dans les capteurs (voir chapitre 3), engendrer des erreurs de lecture et fausser ainsi les décisions au niveau des contrôleurs. Des *fautes* peuvent aussi affecter les actionneurs et résulter en de sérieux endommagements des contrôleurs et de la performance des procédés. L'exemple suivant illustre l'effet d'une *faute* sur la mesure d'une variable donnée, dans un cas déterministe.

### 2.2.1 Exemple pratique

On considère l'exemple d'un réacteur chimique avec échangeur de chaleur (Chen, 1999), (Watanabe, 1983) dont les variables mises en jeu sont :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0(t) \\ T_0(t) \\ T_w(t) \\ T_m(t) \end{bmatrix} \\
 u(t) &= \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6C_i(t) \\ 3.6T_i(t) \\ 36T_{wi}(t) \end{bmatrix} \\
 y(t) &= C_0(t)
 \end{aligned}$$

avec :

$C_0$  : concentration du produit chimique [ $gmol/m^3$ ]

$T_0$  : température du produit  $[K]$

$T_w$  : température de l'eau de la jaquette de l'échangeur de température  $[K]$

$T_m$  : température de refroidissement  $[K]$

$C_i$  : concentration d'entrée du réactif  $[gmol/m^3]$

$T_i$  : température d'entrée  $[K]$

$T_{wi}$  : température d'entrée de l'eau de refroidissement  $[K]$

Le système est modélisé par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dw(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$x(t)$  : variable d'état du système

$u(t)$  : variable de commande

$w(t)$  : variable d'entrée inconnue

$y(t)$  : variable de sortie

$A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des matrices de dimensions connues.

$Dw(t)$  représente la non-linéarité dans le système :

$$w(t) = 3.012 \times 10^{12} \exp\left(-\frac{1.2515 \times 10^7}{T_0}\right) = 3.012 \times 10^{12} \exp\left(-\frac{1.2515 \times 10^7}{x_2(t)}\right)$$

$$A = \begin{bmatrix} -3.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -3.6702 & 0.0 & 0.0702 \\ 0.0 & 0.0 & -36.2588 & 0.2588 \\ 0.0 & 0.6344 & 0.7781 & -1.4125 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 20.758 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour pouvoir estimer l'état du système, on utilise un observateur à entrée inconnue dont le principe est d'amener l'erreur d'estimation d'état à approcher zéro asymptotiquement indépendamment de l'entrée inconnue.

L'observateur est décrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = K_A z(t) + U B u(t) + K_B y(t) \\ \hat{x}(t) = z(t) + H y(t) \end{cases}$$

$\hat{x}(t) \in R^n$  : vecteur d'état estimé

$z(t) \in R^n$  : état de l'observateur

$K_A$ ,  $K_B$ ,  $U$  et  $H$  sont des matrices de design de l'observateur.

L'erreur d'estimation est donnée par :  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  et sa dynamique est telle que (voir chapitre 4) :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= [A - HCA - K_{B_1}C]e(t) \\ &\quad + [(A - HCA - K_{B_1}C)H - K_{B_2}]y(t) \\ &\quad + [A - HCA - K_{B_1}C - K_A]z(t) \\ &\quad + [I - HC]Dw(t) + [(I - HC) - U]Bu(t) \end{aligned}$$

avec :  $K_B = K_{B_1} + K_{B_2}$

Si les relations suivantes sont vraies :

$$\begin{cases} (I - HC)D = 0 \\ U = I - HC \\ K_A = A - HCA - K_{B_1}C \\ K_{B_2} = K_A H \\ K_B = K_{B_1} + K_{B_2} \end{cases}$$

alors l'erreur d'estimation aura la forme suivante :

$$\dot{e}(t) = K_A e(t)$$

Pour qu'on puisse concevoir un observateur à entrée inconnue, il faut que  $K_A$  soit stable. Le design de l'observateur consiste alors en quatre étapes :

- vérifier que  $\text{rang}(D) = \text{rang}(CD)$  (voir chapitre 4);
- calculer  $H$ ,  $U$  et  $A_1$  :  

$$H = D[(CD)^T(CD)]^{-1}(CD)^T, U = I - HC, A_1 = UA;$$
- vérifier l'observabilité de  $(C, A_1)$ , alors un observateur à entrée inconnue existe et  $K_{B_1}$  peut être calculé par placement de pôles;
- déduire ensuite  $K_A$  et  $K_B$ ,

ce qui permet d'avoir les paramètres suivants :

$$H = \begin{bmatrix} 0.0023 & 0.0481 & 0 \\ 0.0481 & 0.9977 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0.9977 & -0.0481 & 0 & 0 \\ -0.0481 & 0.0023 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_A = \begin{bmatrix} -0.6295 & -0.0010 & 0.2168 & -0.0034 \\ -0.0010 & -2 & 0 & 0.0002 \\ 0.2554 & 0 & -0.9580 & 0.2588 \\ -0.0260 & 0.0002 & 0.1545 & -1.4125 \end{bmatrix}$$

$$K_B = \begin{bmatrix} -2.9636 & 0.1461 & -0.2168 \\ 0.0779 & -0.0039 & 0 \\ -0.2548 & 0.0123 & -35.3008 \\ 0.0260 & 0.6331 & 0.6236 \end{bmatrix}$$

On suppose maintenant qu'une *faute* peut affecter le capteur de concentration du produit chimique à tout instant et engendrer ainsi des erreurs sur la mesure. Notre objectif est de montrer l'effet de la *faute* sur le *résidu* qui est donné par :

$$r(t) = y(t) - C\hat{x}(t)$$

$y(t)$  étant la mesure entachée de la *faute*  $f(t)$  dont le temps d'apparition est  $t = 5h$  et l'amplitude est :  $2(10^7)[gmol/m^3]$ .

Plus de détails quant à la *détection* et l'*isolation* de *fautes* avec un observateur à entrée inconnue seront donnés au chapitre 4. L'évolution temporelle de la norme du *résidu* est donnée sur la figure 2.1.

Le système étant déterministe à paramètres invariants, seule la présence d'une *faute* peut perturber son fonctionnement. On voit bien sur la figure 2.1 que le *résidu* est nul au début puisque la mesure relevée coïncide avec celle estimée. Par la suite, un brusque changement dénote qu'un biais apparait entre la mesure et l'estimation.

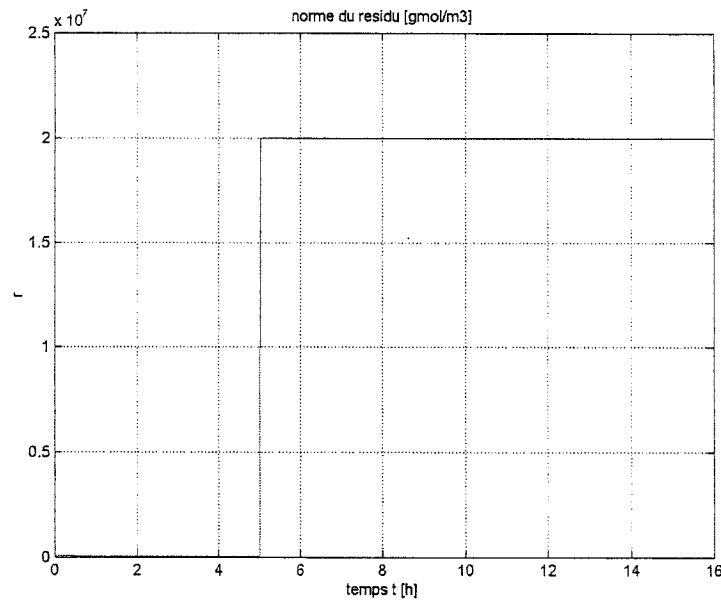


Figure 2.1 Norme du résidu

En effet, le terme de *faute*  $f(t)$  jusqu'ici nul ne l'est plus à l'instant  $t = 5h$ . L'effet de la *faute* est directement ressenti au niveau de la mesure et donc du *résidu*, ce qui résulte en une mesure biaisée du capteur défectueux.

Par ailleurs, des systèmes manufacturiers tels que les ateliers flexibles, qui peuvent aussi être considérés comme des systèmes linéaires à sauts markoviens, opèrent avec des boucles de commande. Il est alors indispensable qu'une fiabilité et une sécurité de fonctionnement soient garanties pour éviter les pannes et les retards de livraison des produits. La *détection* et l'*isolation* de *fautes* dans les systèmes linéaires à sauts markoviens est donc une avenue intéressante à explorer.



## 2.3 Méthodologies proposées

Jusqu'à présent, les travaux se rapportant aux processus linéaires à sauts markoviens tentaient de modéliser, par des modèles à sauts, l'aspect perturbé par une *faute* d'un système linéaire. Notre principale contribution consiste à examiner la *détection* et l'*isolation* de *fautes* pour un système dont la nature même est hybride. Ce qui au mieux de nos connaissances n'a pas encore été réalisé.

Deux orientations seront exposées dans ce mémoire :

- L'application de la *détection* et l'*isolation* de *fautes* par la théorie  $H_\infty$  aux systèmes linéaires à sauts markoviens. La méthodologie, basée principalement sur celle proposée par Boukas dans (Boukas, 2004), consiste à estimer le vecteur de *fautes* par la minimisation, autant que possible, de l'erreur d'estimation d'état par  $H_\infty$ . Une fois les fautes estimées, la génération de *résidus* peut être effectuée et l'évaluation de chacune de ces variables par rapport à des *seuils* de *détection* permet de localiser la *faute* d'intérêt.
- L'application de la *détection* et l'*isolation* de *fautes* par le design d'observateurs à entrées inconnues pour les systèmes linéaires à sauts markoviens. Le but est de concevoir des observateurs qui sont sensibles aux fautes dans tous les capteurs (actionneurs) sauf un seul. L'évaluation de ces *résidus* nous amène à conclure quant à l'apparition d'une *faute* dans le capteur (ou l'actionneur) fixé.

Les principales motivations pour l'utilisation de ces deux méthodes sont que d'une part ces systèmes peuvent être sujets à des entrées inconnues qui sont liées à des perturbations externes, des erreurs sur le modèle, des incertitudes, etc. D'autre

part, les fautes elles aussi peuvent être considérées comme des entrées inconnues. L'estimation par la méthode  $H_\infty$  permet de construire un résidu sensible au vecteur faute et insensible aux entrées de perturbation d'énergie finie. La détection de faute par un observateur à entrée inconnue permet, elle, de concevoir des résidus complètement découplés des entrées inconnues. L'isolation de fautes par ce même type d'observateurs donne la possibilité de les sensibiliser à un certain groupe de fautes et de découpler le résidu des entrées inconnues et d'une faute choisie alternativement.

Dans les deux cas, on peut arriver à bâtir des résidus sensibles aux fautes et insensibles aux perturbations et entrées inconnues, ce qui est l'objectif même de bonnes détection et isolation de fautes.

## CHAPITRE 3

### DÉTECTION ET ISOLATION DE FAUTES DANS LES SYSTÈMES LINÉAIRES À SAUTS MARKOVIENS PAR L'APPROCHE $H_\infty$

En préambule, une brève description des concepts et outils mathématiques utilisés est donnée. Ce chapitre expose ensuite la procédure de détection et d'isolation de fautes dans les systèmes linéaires à sauts markoviens par l'approche  $H_\infty$ .

#### 3.1 Outils mathématiques et généralités

Plusieurs des concepts mathématiques utilisés dans ce mémoire sont supposés connus. Par conséquent, un bref aperçu de quelques *nouvelles* notions sera effectué le long de cette section.

##### 3.1.1 Types de fautes

La faute se définit comme un changement indésirable d'une propriété spécifique ou d'un paramètre du système qui en dégrade la performance. Différents types de fautes peuvent être considérés, et ce dépendamment de leurs caractéristiques temporelles, leurs emplacements et leurs effets.

Ainsi, lorsque le critère est la durée dans le temps de la faute, on distingue, comme le montre la figure 3.1, trois classes de fautes : les fautes *abruptes* qui surviennent brusquement et persistent, les fautes *naissantes* qui sont insignifiantes au départ

mais atteignent des proportions importantes avec le temps et les fautes *intermittantes* qui apparaissent à des intervalles irréguliers.

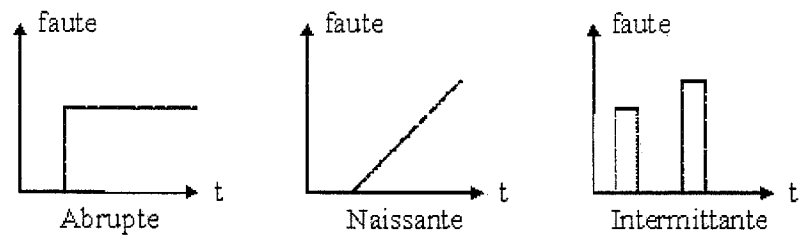


Figure 3.1 Dépendance temporelle des fautes

Les fautes peuvent avoir lieu dans les actionneurs et engendrer de sérieuses conséquences sur la performance du système. Elles peuvent aussi survenir au niveau des capteurs et résulter en une mauvaise lecture des valeurs de sorties. Les fautes au niveau d'un composant du procédé, elles, sont dues à des changements des paramètres physiques du système. Dans ce mémoire, on s'intéressera surtout aux fautes *abruptes* dans les actionneurs et les capteurs.

Selon que les fautes sont *additives* ou *multiplicatives* (Figure 3.2), elles peuvent changer la valeur moyenne du signal de sortie et résulter en des offsets ou bien changer les paramètres du procédé. On ne considère dans ce qui suit que des fautes *additives*.

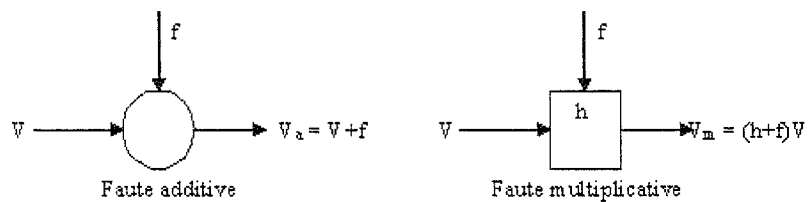


Figure 3.2 Influence additive et multiplicative des fautes

### 3.1.2 Complément de Schur

Plusieurs des conditions d'existence ou de stabilité des observateurs ou estimateurs ajustés par la suite sont sous forme d'inégalités matricielles linéaires. Un des lemmes les plus utilisés dans l'expression de ces formes mathématiques est le lemme de Schur concernant le signe d'un bloc de matrices. On suppose pour cela que les matrices sur la diagonale de ce bloc sont inversibles.

#### Lemme 3.1 :

Soit  $M$  une matrice symétrique telle que :

$$M = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix}$$

$X, Y$  des matrices symétriques, alors :  $M$  est positive définie si et seulement si :

$$\begin{cases} Z > 0 \\ X - YZ^{-1}Y^T > 0 \end{cases}$$

ou bien :

$$\begin{cases} X > 0 \\ Z - Y^T X^{-1} Y > 0 \end{cases}$$

La matrice  $X - YZ^{-1}Y^T$  est appelée : *complément de Schur* de  $X(Z)$  en  $M$ .

Démonstration : voir (Boukas, 2004).

### 3.1.3 Stabilité stochastique

Dans tout ce qui suit, on ne considèrera que des systèmes linéaires à sauts markoviens. De pareils systèmes sont linéaires déterministes pour un mode donné  $i$  parmi  $N$ . Le passage d'un mode à un autre se fait selon un processus continu de Markov  $\{s(t), t \geq 0\}$  prenant des valeurs dans l'espace d'état fini  $S = \{1, 2, \dots, N\}$  et ayant pour générateur infinitésimal :

$$\Delta = (\lambda_{ij}), i, j \in S$$

avec :  $\lambda_{ij} \geq 0, \forall j \neq i, \lambda_{ii} = -\sum_{j \neq i} \lambda_{ij}$ .

Le modèle de ce type de systèmes est ainsi décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(s(t))x(t) + B(s(t))u(t) + D(s(t))w(t), \\ y(t) = C_y(s(t))x(t). \end{cases} \quad (3.1)$$

$\{s(t), t \geq 0\}$  : processus de Markov prenant des valeurs dans  $S$  décrivant l'évolution du système d'un mode à un autre,

$x(t)$  : variable d'état du système à l'instant  $t$

$u(t)$  : variable de commande à l'instant  $t$

$w(t)$  : variable de perturbation à l'instant  $t$

$y(t)$  : variable de sortie à l'instant  $t$

$A(s(t)), B(s(t)), D(s(t)), C_y(s(t))$  : matrices de dimensions connues.

La notion de stabilité revient inéluctablement dans la conception d'observateurs et d'estimateurs en général et plus particulièrement en détection et isolation de fautes. De par la variation aléatoire des états du système (Boukas, 2004), il n'est pas possible de traiter sa stabilité comme pour un système linéaire déterministe. Pour cela, on définit le concept de *stabilité stochastique*.

### **Théorème 3.1 :**

Le système (3.1) est *stochastiquement stable* si et seulement si il existe un ensemble de matrices symétriques et définies-positives  $P = (P(1), \dots, P(N))$  telles que l'inégalité matricielle linéaire (LMI) suivante est vérifiée  $\forall i \in S$  :

$$A^T(i)P(i) + P(i)A(i) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}P(j) < 0 \quad (3.2)$$

où :  $\lambda_{ij}$  est le taux de transition d'un mode  $i$  vers un mode  $j$ .

Démonstration : (Boukas, 2004) voir annexe I.

## **3.2 Position du problème**

Plusieurs auteurs ont utilisé le filtrage  $H_\infty$  pour la détection et l'isolation de fautes dans les procédés (Besançon, 2003), (Edelmayer, 2002), (Marcos, 2004). En effet, en considérant la faute comme une entrée inconnue à énergie finie, la détecter et l'isoler revient à rendre le résidu plus sensible à celle-ci qu'aux autres entrées. Une manière de le faire est d'estimer le vecteur faute par la théorie  $H_\infty$  puis de

considérer l'estimée comme étant le résidu. Dans ce qui suit, on présentera les conditions pour atteindre cet objectif de filtrage pour les systèmes linéaires à sauts markoviens sous forme d'inégalités matricielles linéaires.

On suppose que le système a une dynamique stochastiquement stable. Puisqu'il n'y a aucun objectif de contrôle et sans perte de généralités, on néglige le terme de commande dans le modèle :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(s(t))x(t) + D(s(t))w(t) + F(s(t))f(t), \\ y(t) = C_y(s(t))x(t) + D_y(s(t))w(t) + F_y(s(t))f(t). \end{cases} \quad (3.3)$$

$x(t) \in R^n$  : variable d'état du système à l'instant  $t$

$f(t) \in R^q$  : vecteur faute à l'instant  $t$

$w(t) \in R^p$  : variable de perturbation à l'instant  $t$

$y(t) \in R^m$  : variable de sortie à l'instant  $t$

$A(s(t)), F(s(t)), F_y(s(t)), C_y(s(t)), D(s(t)), D_y(s(t))$  : matrices de dimensions connues.

Le modèle adopté ici est inspiré de celui de (Patton, 1998) pour lequel le vecteur faute  $f(t)$  représente les fautes pouvant avoir lieu dans les actionneurs ou les capteurs.

L'objectif principal est de détecter et localiser la faute à l'instant précis où elle a lieu. Pour ce faire, on utilise le filtrage  $H_\infty$  pour estimer le vecteur faute. On définit donc l'erreur d'estimation  $e(t) = r(t) - f(t)$  où  $r(t)$  est le vecteur résidu généré par un filtre  $F$ . Ce dernier est conçu de sorte que  $r(t)$  fournisse une estimée du vecteur faute  $f(t)$ .



Le schéma suivant illustre la configuration adoptée pour la formulation de ce problème :

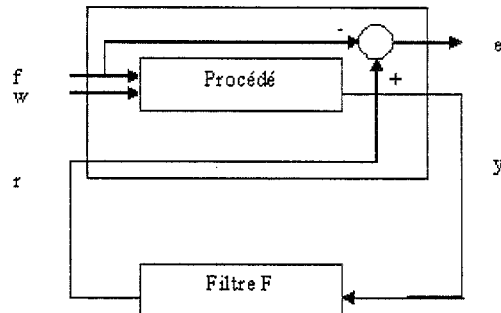


Figure 3.3 Filtre proposé pour la détection et l'isolation de fautes

La détection et l'isolation de fautes se résume en ce qui suit :

- Génération du résidu : le filtre F permet d'estimer le vecteur faute, par la minimisation de la norme  $H_\infty$  de l'effet des entrées inconnues et de perturbation sur l'erreur d'estimation  $e(t)$ . Le résidu obtenu, qui n'est autre que l'estimée de la faute, est forcément sensible à la faute à détecter ou à isoler et est 'robuste' aux autres entrées sans intérêt telle que la perturbation  $w(t)$ .
- Évaluation du résidu : l'estimation du vecteur faute permet de former des résidus dont chaque composante est sensible à une faute bien spécifique. À chaque instant, il faudrait calculer puis évaluer le(s) résidu(s) par rapport à un seuil  $J_{th}$  ( $J_{th_i}, i = 1, \dots, q$ ) pour voir si une faute a eu lieu (détection) et à quel endroit (isolation). Ce seuil exprime la limite au delà de laquelle une faute n'est plus tolérable par le système et qu'une alarme est déclenchée. Il est calculé en considérant le modèle du procédé dans des conditions de fonctionnement sans fautes.

### 3.3 Détection et isolation de fautes par l'approche $H_\infty$

Dans cette section, on présente la procédure de détection et d'isolation de fautes basée sur la théorie du filtrage  $H_\infty$  développée dans (Boukas, 2004) pour les systèmes linéaires à sauts markoviens. Dans un premier temps, on expose la méthode de génération du résidu. Ensuite, on détaille le processus d'évaluation du résidu en vue de la détection puis de l'isolation de fautes. Des exemples numériques sont traités pour illustrer les concepts théoriques énoncés.

#### 3.3.1 Générateur de résidu

La faute étant considérée comme une entrée inconnue du procédé, l'estimer revient à estimer une entrée inconnue plutôt qu'une variable d'état. Pour cela, on utilise un filtre de déconvolution ou de filtrage inverse (Saber, 1999) qui permet d'estimer, à partir de la mesure  $y(t)$ , le vecteur faute indépendamment des perturbations et des autres entrées inconnues. Le modèle du filtre est généralement donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = K(s(t))x_f(t) + L(s(t))y(t), \\ r(t) = M(s(t))x_f(t) + N(s(t))y(t) \end{cases} \quad (3.4)$$

$r(t)$  : résidu et estimée de la faute à l'instant  $t$

$x_f(t)$  : variable d'état du filtre à l'instant  $t$

$y(t)$  : mesure à l'instant  $t$

$K(s(t))$ ,  $L(s(t))$ ,  $M(s(t))$  et  $N(s(t))$  : paramètres de design du filtre au mode  $s(t)$ .

L'objectif est de pouvoir minimiser au sens de la norme  $H_\infty$  l'erreur d'estimation  $e(t)$  par rapport au vecteur de perturbation généralisée :  $\tilde{w}(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$ .

Ainsi, la nouvelle configuration du système pour la détection et l'isolation de fautes est donnée comme suit :

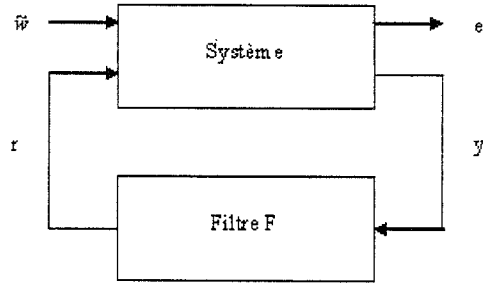


Figure 3.4 Reconfiguration du filtre pour la détection et l'isolation de fautes

Les dynamiques de la variable d'état du système et de celle du filtre sont :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(s(t))x(t) + D(s(t))w(t) + F(s(t))f(t) \\ \dot{x}_f(t) = K(s(t))x_f(t) + L(s(t))y(t) \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(s(t))x(t) + D(s(t))w(t) + F(s(t))f(t) \\ \dot{x}(t) - \dot{x}_f(t) = [A(s(t))x(t) - L(s(t)) - K(s(t))]x(t) + K(s(t))(x(t) - x_f(t)) + \\ + [D(s(t)) - L(s(t))D_y(s(t))]w(t) + [F(s(t)) - L(s(t))F_y(s(t))]f(t) \end{cases}$$

ce qui peut être réécrit, en prenant  $i$  comme étant le mode du système, sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}(t) - \dot{x}_f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(i) & 0 \\ A(i) - L(i)C_y(i) - K(i) & K(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t) - x_f(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F(i) & D(i) \\ F(i) - L(i)F_y(i) & D(i) - L(i)D_y(i) \end{bmatrix} \tilde{w}(t)$$

L'erreur d'estimation est alors :

$$\begin{aligned}
 e(t) &= (r(t) - f(t)) \\
 &= \begin{bmatrix} M(i) + N(i)C_y(i) & M(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t) - x_f(t) \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} N(i)F_y(i) - I & N(i)D_y(i) \end{bmatrix} \tilde{w}(t)
 \end{aligned}$$

Ainsi, on aboutit au modèle étendu suivant :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}(i)\tilde{x}(t) + \tilde{G}(i)\tilde{w}(t), \\ e(t) = \tilde{C}(i)\tilde{x}(t) + \tilde{G}_r(i)\tilde{w}(t). \end{cases}$$

où :

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t) - x_f(t) \end{bmatrix}, \tilde{w}(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}(i) = \begin{bmatrix} A(i) & 0 \\ A(i) - L(i)C_y(i) - K(i) & K(i) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{G}(i) = \begin{bmatrix} F(i) & D(i) \\ F(i) - L(i)F_y(i) & D(i) - L(i)D_y(i) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}(i) = \begin{bmatrix} M(i) + N(i)C_y(i) & -M(i) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{G}_r(i) = \begin{bmatrix} N(i)F_y(i) - I & N(i)D_y(i) \end{bmatrix}$$

Ce modèle permet de générer l'erreur d'estimation à chaque instant. Pour pouvoir concevoir le filtre d'estimation de la faute, il faut que cette erreur soit minimisée au maximum au sens de la norme  $H_\infty$  de sorte que :

$$\sup_{\tilde{w} \in L_2} \frac{\|e(t)\|_2}{\|\tilde{w}(t)\|_2} < \gamma$$

avec :  $\|v(t)\|_2 = \int_0^\infty v^T(t)v(t)dt$

ce qui est équivalent à minimiser la norme  $H_\infty$  de l'influence de la perturbation généralisée  $\tilde{w}(t)$  sur l'erreur d'estimation  $e(t)$ .

Le théorème suivant donne les principales conditions (voir (Boukas, 2004)) à satisfaire pour atteindre cet objectif.

**Théorème 3.2 :**

Soit  $\gamma$  une constante positive et  $R$  une matrice symétrique et définie-positive représentant le poids des conditions initiales. S'il existe un ensemble de matrices symétriques et définies-positives  $P = (P(1), \dots, P(N))$  tel que  $\forall i \in S$  :

$$\begin{bmatrix} \tilde{J}_1(i) & P(i)\tilde{G}(i) & \tilde{C}^T(i) \\ \tilde{G}^T(i)P(i) & -\gamma^2 I & \tilde{G}_r^T(i) \\ \tilde{C}(i) & \tilde{G}_r(i) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.5)$$

et :

$$\begin{bmatrix} I & I \end{bmatrix} P(i_0) \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \leq \gamma^2 R \quad (3.6)$$

où :  $\tilde{J}_1(i) = \tilde{A}^T(i)P(i) + P(i)\tilde{A}(i) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}P(j)$

alors le système étendu est stochastiquement stable et l'erreur d'estimation satisfait :

$$\|e(t)\|_2^2 \leq \gamma^2 [\|\tilde{w}(t)\|_2^2 + x^T(0)Rx(0)]$$

**Démonstration :**

On remarque tout d'abord d'après (3.5) que :

$$\tilde{A}^T(i)P(i) + P(i)\tilde{A}(i) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}P(j) < 0$$

ce qui implique d'après le théorème 3.1 que le système étendu est stable.

Pour pouvoir minimiser l'erreur d'estimation, on définit le critère de performance  $H_\infty$  suivant  $\forall T > 0$  :

$$J_T = E[\int_0^T (e^T(t)e(t) - \gamma^2 \tilde{w}^T(t)\tilde{w}(t))dt]$$

qu'on devrait minimiser de façon optimale. En considérant  $L$ , le générateur infinitésimal du processus de Markov (Boukas, 2004)  $\{(x(t), s(t)), t \geq 0\}$ , et la fonction de Lyapunov suivante,  $\forall i \in S$  :

$$V(\tilde{x}(t), i) = \tilde{x}^T(t)P(i)\tilde{x}(t) \tag{3.7}$$

on a :

$$\begin{aligned} LV(\tilde{x}(t), i) &= \dot{\tilde{x}}(t)^T P(i)\tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t)P(i)\dot{\tilde{x}}(t) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \tilde{x}^T(t)P(j)\tilde{x}(t) \\ &= \tilde{x}^T(t)[\tilde{A}^T(i)P(i) + P(i)\tilde{A}(i) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}P(j)]\tilde{x}(t) + \tilde{w}^T(t)\tilde{G}^T(i)P(i)\tilde{x}(t) \\ &+ \tilde{x}^T(t)P(i)\tilde{G}(i)\tilde{x}(t) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} e^T(t)e(t) - \gamma^2 \tilde{w}^T(t)\tilde{w}(t) &= [\tilde{C}(i)\tilde{x}(t) + \tilde{G}_r(i)\tilde{w}(t)]^T [\tilde{C}(i)\tilde{x}(t) + \tilde{G}_r(i)\tilde{w}(t)] \\ &\quad - \gamma^2 \tilde{w}^T(t)\tilde{w}(t) \end{aligned}$$

Tenant compte des deux relations précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned} e^T(t)e(t) - \gamma^2 \tilde{w}^T(t)\tilde{w}(t) + LV(\tilde{x}(t), i) &= \tilde{x}(t)^T [\tilde{A}^T(i)P(i) + P(i)\tilde{A}(i) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}P(j) \\ &\quad + \tilde{C}^T(i)\tilde{C}(i)]\tilde{x}(t) + \tilde{w}(t)^T [\tilde{G}_r(i)^T \tilde{G}_r(i) \\ &\quad - \gamma^2 I]\tilde{w}(t) \\ &\quad + \tilde{x}(t)^T [P(i)\tilde{G}(i) + \tilde{C}^T(i)\tilde{G}_r(i)]\tilde{w}(t) \\ &\quad + \tilde{w}(t)^T [\tilde{G}(i)P(i) + \tilde{G}_r^T(i)\tilde{C}(i)]\tilde{w}(t) \end{aligned}$$

ce qui s'exprime matriciellement par :

$$e^T(t)e(t) - \gamma^2 \tilde{w}^T(t)\tilde{w}(t) + LV(\tilde{x}(t), i) = \begin{bmatrix} \tilde{x}^T(t) & \tilde{w}^T(t) \end{bmatrix} \Lambda_n(i) \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{w}(t) \end{bmatrix}$$

où :

$$\Lambda_n(i) = \begin{bmatrix} \tilde{J}_1(i) + \tilde{C}^T(i)\tilde{C}(i) & P(i)\tilde{G}(i) + \tilde{C}^T(i)\tilde{G}_r(i) \\ \tilde{G}^T(i)P(i) + \tilde{G}_r^T(i)\tilde{C}(i) & \tilde{G}_r^T(i)\tilde{G}_r(i) - \gamma^2 I \end{bmatrix}$$

en posant  $\tilde{\xi}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{w}(t) \end{bmatrix}$  on a :

$$e^T(t)e(t) - \gamma^2 \tilde{w}^T(t)\tilde{w}(t) + LV(\tilde{x}(t), i) = \tilde{\xi}^T(t)\Lambda_n(i)\tilde{\xi}(t)$$

en ajoutant puis en retranchant  $LV(\tilde{x}(t), i)$  à la performance  $H_\infty$  on obtient :

$$J_T = E\left[\int_0^T (e^T(t)e(t) - \gamma^2 \tilde{w}^T(t)\tilde{w}(t) + LV(\tilde{x}(t), i))dt\right] - E\left[\int_0^T LV(\tilde{x}(t), i)dt\right]$$

En utilisant la formule de Dunkin, on a :

$$E\left[\int_0^T LV(\tilde{x}(t), i)dt\right] = E[V(\tilde{x}_T, i_T)] - E[V(\tilde{x}_0, i_0)]$$

Il découle de (3.7) que :

$$E[V(\tilde{x}_0, i_0)] = E[\tilde{x}^T(0)P(i_0)\tilde{x}(0)] \quad (3.8)$$

De plus :

$$\tilde{x}^T(0) = \begin{bmatrix} x^T(0) & x^T(0) - \hat{x}^T(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0^T & x_0^T \end{bmatrix}^T$$

Considérant (3.6) et (3.8), on a :

$$\begin{aligned} E[V(\tilde{x}_0, i_0)] &= E[x^T(0) \begin{bmatrix} I & I \end{bmatrix} P(i_0) \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} x^T(0)] \\ &\leq \gamma^2 E[x^T(0)Rx(0)] \end{aligned}$$

Ainsi :

$$J_T = E\left[\int_0^T (\tilde{\xi}^T \Lambda_n(i)\tilde{\xi})dt\right] + E[V(\tilde{x}(0), i_0)] - E[V(\tilde{x}(T), i_T)]$$

ce qui implique :

$$J_T \leq E\left[\int_0^T (\tilde{\xi}^T \Lambda_n(i)\tilde{\xi})dt\right] + E[V(\tilde{x}(0), i_0)]$$

Puisque par simple application du lemme 3.1 du complément de Schur à  $\Lambda_n(i)$  et



tenant compte de (3.5),  $\Lambda_n(i) < 0$  pour  $T > 0$  et il s'en suit que :

$$J_T \leq E[V(\tilde{x}(0), i_0)] \leq \gamma^2 x^T(0) R x(0)$$

À la limite, on aboutit à :

$$\begin{aligned} J_\infty &= E\left[\int_0^\infty (e^T(t)e(t) - \gamma^2 \tilde{w}^T(t)\tilde{w}(t))dt\right] \\ &\leq \gamma^2 x^T(0) R x(0) \end{aligned}$$

ce qui donne finalement :

$$\|e(t)\|_2^2 \leq \gamma^2 [\|\tilde{w}(t)\|_2^2 + x^T(0) R x(0)]$$

et le théorème est démontré.

### Design du filtre :

Pour obtenir les conditions de design des paramètres du filtre  $K(i)$ ,  $M(i)$ ,  $N(i)$  et  $L(i)$  (Boukas, 2004), on doit développer plus le théorème précédent sachant que :

$$P(i) = \begin{bmatrix} X_1(i) & 0 \\ 0 & X_2(i) \end{bmatrix}$$

on obtient :

$$\tilde{A}^T(i)P(i) = \begin{bmatrix} A^T(i)X_1(i) & A^T(i)X_2(i) - C_y^T(i)L^T(i)X_2(i) - K^T(i)X_2(i) \\ 0 & K^T(i)X_2(i) \end{bmatrix}$$

$$P(i)\tilde{A}(i) = \begin{bmatrix} X_1(i)A(i) & 0 \\ X_2(i)A(i) - X_2(i)L(i)C_y(i) - X_2(i)K(i) & X_2(i)K(i) \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P(j) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} X_1(j) & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} X_2(j) \end{bmatrix}$$

$$P(i) \tilde{G}(i) = \begin{bmatrix} X_1(i) F(i) & X_1(i) D(i) \\ X_2(i) F(i) - X_2(i) L(i) F_y(i) & X_2(i) D(i) - X_2(i) L(i) D_y(i) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{G}^T(i) P(i) = \begin{bmatrix} F^T(i) X_1(i) & F^T(i) X_2(i) - F_y^T(i) L^T(i) X_2(i) \\ D^T(i) X_1(i) & D^T(i) X_2(i) - D_y^T(i) L^T(i) X_2(i) \end{bmatrix}$$

De plus, en posant :

$$Y(i) = X_2(i) L(i)$$

$$Z(i) = X_2(i) L(i)$$

on arrive à :

$$\begin{bmatrix} \Gamma_0(i) & \Gamma_1^T(i) & \Gamma_2(i) & \Gamma_3(i) & \Gamma_4^T(i) \\ \Gamma_1(i) & \Gamma_5(i) & \Gamma_6(i) & \Gamma_7(i) & -M^T(i) \\ \Gamma_2^T(i) & \Gamma_6^T(i) & -\gamma^2 I & 0 & \Gamma_8^T(i) \\ \Gamma_3^T(i) & \Gamma_7^T(i) & 0 & -\gamma^2 I & \Gamma_9^T(i) \\ \Gamma_4(i) & -M(i) & \Gamma_8(i) & \Gamma_9(i) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.9)$$

avec :

$$\Gamma_0(i) = A^T(i)X_1(i) + X_1(i)A(i) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}X_1(j)$$

$$\Gamma_1(i) = X_2(i)A(i) - Y(i)C_y(i) - Z(i)$$

$$\Gamma_2(i) = X_1(i)F(i), \Gamma_3(i) = X_1(i)D(i)$$

$$\Gamma_4(i) = M(i) + N(i)C_y(i)$$

$$\Gamma_5(i) = Z^T(i) + Z(i) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}X_2(j)$$

$$\Gamma_6(i) = X_2(i)F(i) - Y(i)F_y(i)$$

$$\Gamma_7(i) = X_2(i)D(i) - Y(i)D_y(i)$$

$$\Gamma_8(i) = N(i)F_y(i) - I, \Gamma_9(i) = N(i)D_y(i)$$

Ainsi, le design des paramètres du filtre est résumé dans le théorème suivant.

**Théorème 3.3 :**

Soit  $\gamma$  une constante positive et  $R$  une matrice symétrique et définie-positive représentant le poids des conditions initiales. S'il existe des matrices symétriques et définies-positives :  $X_1 = (X_1(1), \dots, X_1(N))$ ,  $X_2 = (X_2(1), \dots, X_2(N))$  et un ensemble de matrices  $Y = (Y(1), \dots, Y(N))$  satisfaisant le LMI (3.9) pour tout  $i \in S$ , et  $X_1(i_0) + X_2(i_0) < \gamma R$

alors, il existe un filtre (ou observateur) de la forme (3.4) tel que l'erreur d'estimation est stochastiquement stable et est bornée :

$$\|e(t)\|_2^2 \leq \gamma^2 [\|\tilde{w}(t)\|_2^2 + x^T(0)Rx(0)]$$

et les gains du filtre sont donnés par :

$$\begin{cases} L(i) = X_2^{-1}(i)Y(i), \\ K(i) = X_2^{-1}(i)Z(i). \end{cases}$$

$M(i)$  et  $N(i)$  sont obtenus directement à partir de la résolution du LMI (3.9).

### 3.4 Évaluation du résidu

Au terme de l'étape précédente, l'estimée du vecteur faute est prise comme étant le résidu. Pour pouvoir conclure quant à la présence ou non d'une faute, ce résidu doit être évalué. La plupart du temps, cette évaluation est effectuée via la définition d'un seuil de détection. Pour déterminer ce seuil, on considère la dynamique du système dans son état fiable. En outre, l'évaluation peut différer selon que l'on veuille effectuer une détection ou une isolation de fautes.

#### 3.4.1 Détection de faute

Lorsque l'objectif se limite simplement à détecter une faute dans le système, le résidu est comparé à un seuil de détection qui est calculé en résolvant les équations du modèle dynamique sans fautes. Cette représentation relie la variable d'état du système, la variable d'état du filtre et le résidu :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(i)x(t) + D(i)w(t) \\ y(t) = C_y(i)x(t) + D_y(i)w(t) \\ \dot{x}_f(t) = K(i)x_f(t) + L(i)y(t) \\ r(t) = M(i)x_f(t) + N(i)y(t) \end{cases}$$

Le seuil de détection est défini comme étant  $J_{th} = E(\sup_{f(t)=0, w(t)} \|r(t)\|_T)$ .

À conditions initiales nulles, il est évident que lorsque la perturbation  $w(t)$  est nulle, le seuil de détection l'est aussi. Lorsque la perturbation est non nulle, le seuil prend une valeur calculée en tenant compte de la perturbation maximale susceptible d'atteindre le système sans fautes. Ainsi, la procédure de détection se résume à comparer la norme du résidu au seuil  $J_{th}$  sur un intervalle de détection  $T$ , tel que :

- si  $\|r(t)\|_T > J_{th}$  alors une faute a lieu;
- sinon, aucune faute n'est détectée,

avec :  $\|r(t)\|_T = E[\int_{t_1}^{t_2} r^T(t)r(t)dt]^{1/2}$

$T = t_2 - t_1$  et  $t \in [t_1, t_2]$  : intervalle de détection.

### 3.4.2 Exemple numérique de détection : cas d'une faute dans l'actionneur

On considère un système à deux modes dont les taux de transition sont donnés par:

$$\lambda = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.3 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Les modèles dynamiques du système sont respectivement :

*Mode 1*

$$A(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

*Mode 2*

$$A(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Pour les deux modes  $i = 1, 2$  :

$$D(i) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$F(i) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$F_y(i) = 1$$

$$C_y(i) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D_y(i) = 0.05$$

On prend :  $\gamma = 0.2382$ .

L'amplitude maximale de la perturbation est telle que :  $W(t) = 1, \forall t \geq 0$ .

*Simulation*

Pour cette simulation et pour toutes les suivantes, on suppose que le système saute du mode 1 au mode 2 à  $t = 40$ , bien que plusieurs sauts peuvent apparaître avant cet instant. Cette hypothèse est considérée par souci de simplification et vu que le but est de déterminer l'instant d'apparition d'une faute indépendamment du mode courant. On suppose que dans les modèles traités les fautes sont détectables et isolables.

Une faute a lieu dans l'actionneur à  $t = 7$  dans le mode 1 et continue durant le mode 2 avec une amplitude constante de 2.

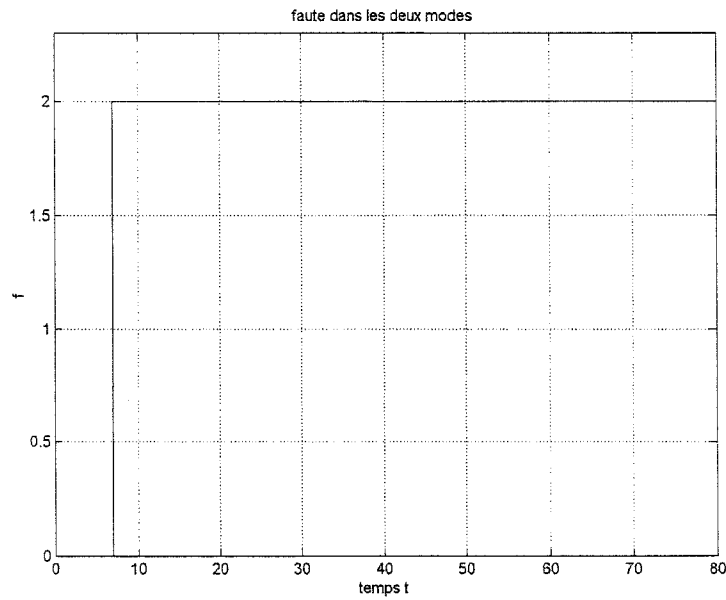


Figure 3.5 Faute réelle affectant le système

L'objectif est de voir si le code de détection peut déceler la présence de la faute. À chaque instant, on calcule la norme du résidu (estimée de la faute) et on la compare à un seuil durant un intervalle de temps de détection  $T$  qui est pris comme  $T = 5$  périodes de temps pour les deux modes.

En résolvant le LMI (3.9), on obtient les paramètres du filtre suivants :

*Mode 1:*

$$K(1) = \begin{bmatrix} 0.4452 & 1.5674 \\ -4.7824 & -4.6358 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
L(1) &= \begin{bmatrix} -0.1400 \\ 1.2809 \end{bmatrix} \\
M(1) &= \begin{bmatrix} -2.3802 & -2.2400 \end{bmatrix} \\
N(1) &= 0.8041
\end{aligned}$$

*Mode 2:*

$$\begin{aligned}
K(2) &= \begin{bmatrix} 0.3770 & 1.2971 \\ -4.7022 & -4.5126 \end{bmatrix} \\
L(2) &= \begin{bmatrix} -0.1184 \\ 1.2566 \end{bmatrix} \\
M(2) &= \begin{bmatrix} -2.3764 & -2.2118 \end{bmatrix} \\
N(2) &= 0.8024
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la procédure de détection précédente, les résultats affichés sont :

une faute est détectée durant le mode 1 à  $t = 7$ ;

une faute est détectée durant le mode 2 à  $t = 40$ .

Le code permet donc de détecter et la présence de la faute à  $t = 7$  au mode 1 et sa continuité au passage et durant le mode 2. L'évolution du résidu ou de l'estimée de la faute dans les deux modes est représentée sur la figure 3.6.

Comme on le voit sur la courbe, le résidu donne une bonne estimation de la faute et montre ainsi la présence de celle-ci à l'instant précis où elle a lieu ainsi que sa continuité au mode 2.



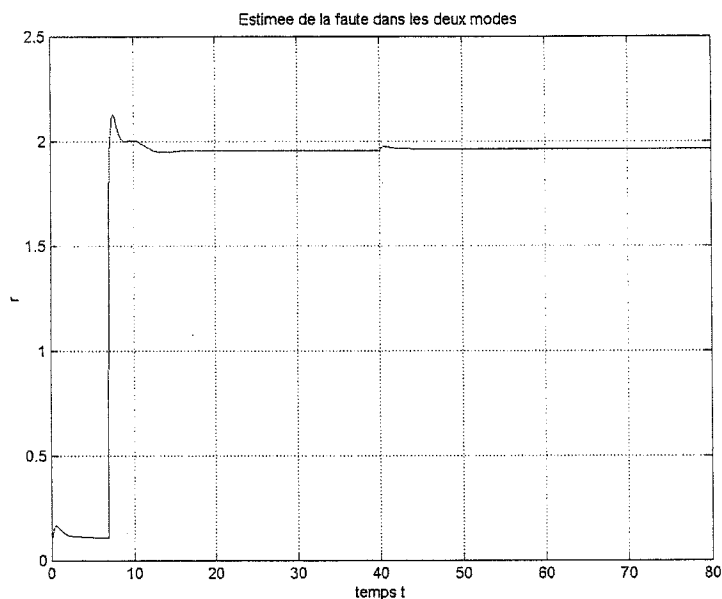


Figure 3.6 Détection d'une seule faute

### 3.4.3 Isolation de faute dans les capteurs ou les actionneurs

L'objectif ici est d'isoler une faute donnée des autres fautes sans intérêt. De la même manière que précédemment, un seuil de détection  $J_{th}$  est calculé à partir du modèle sans fautes du système. Chacune des composantes de ce seuil  $J_{th_i} (i = 1, \dots, q)$  est utilisée pour la détection d'une faute bien spécifique; ce qui revient à l'isoler.

En supposant que la dimension du vecteur résidu est au moins égale à celle du nombre de fautes, le processus de détection est alors donné par :

- si  $\|r_i(t)\|_T > J_{th_i}$ , alors une faute  $f_i(t)$  a lieu;
- sinon, la faute  $f_i(t)$  n'est pas détectée;

avec :  $\|r_i(t)\|_T = E[\int_{t_1}^{t_2} r_i^T(t)r_i(t)dt]^{1/2}$

$T = t_2 - t_1$  et  $t \in [t_1, t_2]$

$q$  : nombre de fautes.

Le résidu  $r_i(t)$  n'est autre que la  $i$ ème composante de l'estimée de la faute  $f(t)$ .

#### 3.4.4 Exemple numérique d'isolation : cas de fautes sur deux capteurs

On considère un système à deux modes dont les taux de transition sont donnés par:

$$\lambda = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.3 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Les modèles dynamiques du système sont respectivement :

*Mode 1*

$$A(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F(1) = \begin{bmatrix} 40 & 0.2 \\ 2 & 1.1 \end{bmatrix}$$

$$D(1) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$F_y(1) = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_y(1) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D_y(1) = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

### *Mode 2*

$$A(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F(2) = \begin{bmatrix} 40 & 0.3 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D(2) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$F_y(2) = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.1 \\ 0.01 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_y(2) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D_y(2) = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

### *Simulation*

Puisque le vecteur faute  $f(t)$  représente délibérément des fautes dans des capteurs ou bien dans des actionneurs, on suppose que le système est sujet à des fautes sur deux capteurs. Comme précédemment, le système passe du mode 1 au mode 2 à  $t = 40$ . Les défauts dans le système apparaissent comme suit :

- une faute affecte le capteur 1 à l'instant  $t = 7$  au mode 1 avec une amplitude

de 2 et continue jusqu'en mode 2;

- une faute affecte le capteur 2 à l'instant  $t = 10$  au mode 1 avec une amplitude de 2 et continue durant le mode 2 avec la même amplitude. À chaque instant  $t$  et sur un intervalle de temps de détection  $T$ , des seuils sont calculés de sorte à voir si l'une des composantes du résidu a dépassé la valeur minimale à cause d'une faute. L'intervalle de détection est pris à  $T = 5$  périodes.

La perturbation maximale prend la valeur suivante :  $W(t) = 0.1, \forall t \geq 0$ .

En résolvant le LMI (3.9), on obtient les paramètres du filtre suivants :

*Mode 1:*

$$\begin{aligned} K(1) &= \begin{bmatrix} -18.2910 & -17.3839 \\ -0.9417 & -0.9463 \end{bmatrix} \\ L(1) &= \begin{bmatrix} 5.8628 & 0.6414 \\ -1.1369 & 1.1376 \end{bmatrix} \\ M(1) &= \begin{bmatrix} -0.3500 & -0.3526 \\ -0.0000 & -0.0000 \end{bmatrix} \\ N(1) &= \begin{bmatrix} 0.1297 & -0.0030 \\ -1.0098 & 1.0098 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

*Mode 2:*

$$\begin{aligned} K(2) &= \begin{bmatrix} -18.4494 & -17.7514 \\ -0.0738 & -0.0743 \end{bmatrix} \\ L(2) &= \begin{bmatrix} 6.1475 & 0.5381 \\ -1.4549 & 1.1487 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$M(2) = \begin{bmatrix} -0.3476 & -0.3503 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$N(2) = \begin{bmatrix} 0.1466 & -0.0174 \\ -1.1111 & 1.1111 \end{bmatrix}$$

La valeur de  $\gamma$  optimale est de : 2.0587. Ainsi, en utilisant la procédure de détection précédente, les résultats affichés sont :

- une faute a lieu au mode 1 dans le capteur 1 à l'instant  $t_1 = 7$ ;
- une faute a lieu au mode 1 dans le capteur 2 à l'instant  $t_1 = 10$ ;
- une faute a lieu au mode 2 dans le capteur 1 à l'instant  $t_2 = 40$ ;
- une faute a lieu au mode 2 dans le capteur 2 à l'instant  $t_2 = 40$ .

Ainsi, les fautes sont détectées à l'instant précis où elles ont lieu, leur continuité au mode 2 est aussi démontrée. Comme on peut le voir sur les courbes suivantes, les résidus montrent la présence des fautes dans les deux modes à l'instant même où elles ont lieu, on localise aussi leurs origines et on met en évidence leur continuité durant le passage au mode 2.

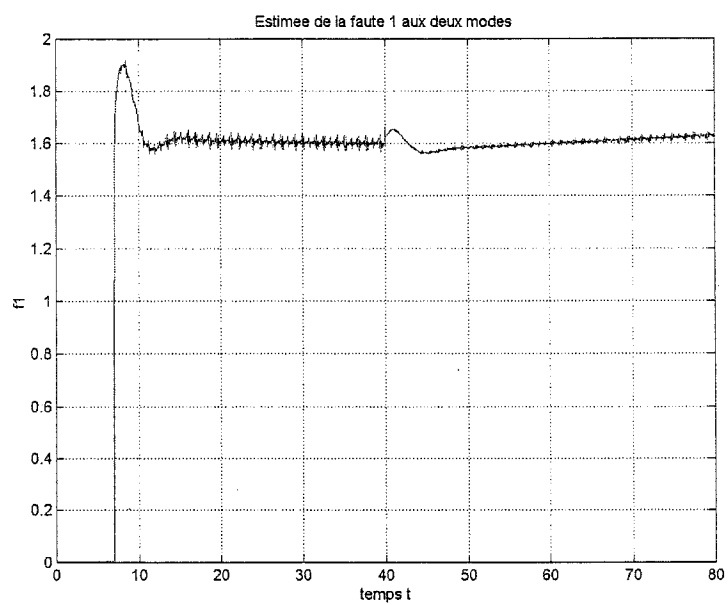


Figure 3.7 Détection et isolation de faute dans le capteur 1

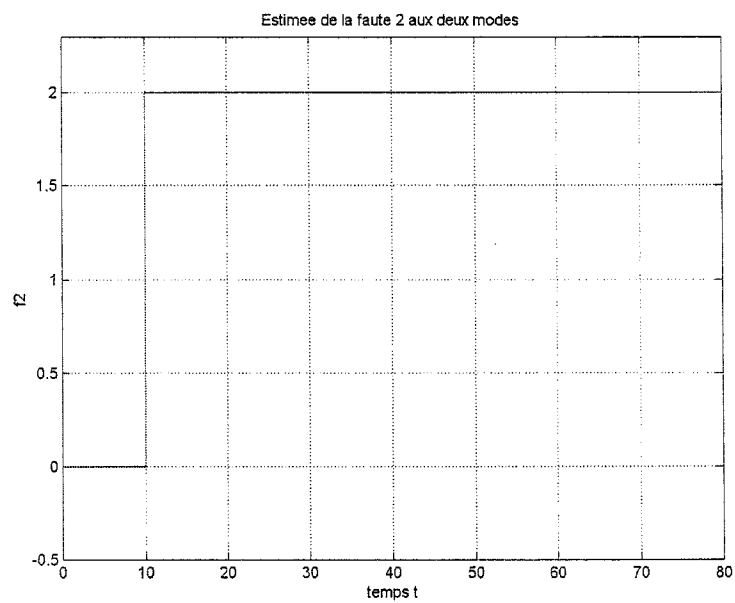


Figure 3.8 Détection et isolation de faute dans le capteur 2

### 3.4.5 Isolation de faute dans des capteurs et des actionneurs

Les exemples traités jusqu'à présent ne considèrent que des cas où les fautes ont lieu dans des actionneurs ou bien des capteurs exclusivement. On pourrait se poser la question sur la possibilité de détection et d'isolation de fautes ayant lieu à la fois au niveau des capteurs et des actionneurs. Bien que la représentation adoptée jusqu'ici permette de résoudre ce problème, on choisit d'examiner cette éventualité sur un modèle similaire à celui proposé dans (Xiong, 2000) (voir chapitre 4) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(s(t))x(t) + D(s(t))w(t) + F_a(s(t))f_a(t), \\ y(t) = C_y(s(t))x(t) + D_y(s(t))w(t) + F_s(s(t))f_s(t). \end{cases} \quad (3.10)$$

$x(t) \in R^n$  : variable d'état du système à l'instant  $t$

$f_a(t) \in R^{q_1}$  : vecteur faute sur l'actionneur à l'instant  $t$

$f_s(t) \in R^{q_2}$  : vecteur faute sur le capteur à l'instant  $t$

$w(t) \in R^p$  : variable de perturbation à l'instant  $t$

$y(t) \in R^m$  : variable de sortie à l'instant  $t$

$A(s(t)), F_a(s(t)), F_s(s(t)), C_y(s(t)), D(s(t)), D_y(s(t))$  : matrices de dimensions connues.

En posant :  $f(t) = \begin{bmatrix} f_a(t) \\ f_s(t) \end{bmatrix}$ , on retrouve la même formulation de problème que pour le système (3.3). Ainsi :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(s(t))x(t) + D(s(t))w(t) + F(s(t))f(t), \\ y(t) = C_y(s(t))x(t) + D_y(s(t))w(t) + F_y(s(t))f(t). \end{cases}$$

avec :  $F(s(t)) = \begin{bmatrix} F_a(s(t)) & 0 \end{bmatrix}$

$F_y(s(t)) = \begin{bmatrix} 0 & F_y(s(t)) \end{bmatrix}$

On se ramène, en plus, à la même procédure de détection et d'isolation de faute que

précédemment ainsi que celle de l'évaluation du résidu obtenu par le filtre (3.4). L'exemple numérique suivant illustre ce fait et traite la détection et l'isolation de faute dans un actionneur et un capteur.

### 3.4.6 Exemple numérique d'isolation : cas de fautes sur un capteur et un actionneur

On considère un système à deux modes dont les taux de transition sont donnés par:

$$\lambda = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.3 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Les modèles dynamiques du système sont respectivement :

*Mode 1*

$$A(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F(1) = \begin{bmatrix} 40 & 0 \\ 0.22 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(1) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$F_y(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_y(1) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$



$$D_y(1) = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

### *Mode 2*

$$A(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F(2) = \begin{bmatrix} 40 & 0 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(2) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$F_y(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_y(2) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D_y(2) = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

### *Simulation*

Les fautes ont lieu dans le système comme suit :

- une faute affecte l'actionneur à l'instant  $t = 7$  au mode 1 avec une amplitude de 2 et continue jusqu'en mode 2;

- une faute affecte le capteur à l'instant  $t = 10$  au mode 1 avec une amplitude de 2 et continue durant le mode 2 avec la même amplitude. À chaque instant  $t$  et sur un intervalle de temps  $T$ , des seuils sont calculés de sorte à voir si l'une des composantes du résidu a dépassé la valeur minimale à cause d'une faute. L'intervalle de détection est pris à  $T = 5$  périodes. On considère une perturbation  $w(t)$  nulle.

En résolvant le LMI (3.9), on obtient les paramètres du filtre suivants :

*Mode 1:*

$$K(1) = \begin{bmatrix} -16.4619 & -15.6200 \\ -0.1437 & -0.1452 \end{bmatrix}$$

$$L(1) = \begin{bmatrix} 5.9668 & -0.0673 \\ -0.2861 & 0.0028 \end{bmatrix}$$

$$M(1) = \begin{bmatrix} -0.3451 & -0.3501 \\ -0.0000 & -0.0000 \end{bmatrix}$$

$$N(1) = \begin{bmatrix} 0.1267 & -0.0011 \\ -1.0101 & 1.0101 \end{bmatrix}$$

*Mode 2:*

$$K(2) = \begin{bmatrix} -16.4505 & -15.7380 \\ -0.1783 & -0.1795 \end{bmatrix}$$

$$L(2) = \begin{bmatrix} 6.0956 & -0.0566 \\ -0.2725 & 0.0028 \end{bmatrix}$$

$$M(2) = \begin{bmatrix} -0.3488 & -0.3518 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$N(2) = \begin{bmatrix} 0.1316 & -0.0011 \\ -1.0101 & 1.0101 \end{bmatrix}$$

La valeur de  $\gamma$  optimale est de : 2.2488. Ainsi, en utilisant la procédure de détection précédente, les résultats affichés sont :

- une faute a lieu au mode 1 dans l'actionneur à l'instant  $t_1 = 7$ ;
- une faute a lieu au mode 1 dans le capteur à l'instant  $t_1 = 10$ ;
- une faute a lieu au mode 2 dans l'actionneur à l'instant  $t_2 = 40$ ;
- une faute a lieu au mode 2 dans le capteur à l'instant  $t_2 = 40$ .

Ainsi, les fautes sont détectées à l'instant précis où elles ont lieu, leur continuité au mode 2 est aussi démontrée. Comme on peut le voir sur les courbes suivantes (Figure 3.7 et Figure 3.8), les résidus montrent la présence des fautes dans les deux modes à l'instant même où elles ont lieu, on localise aussi leurs origines (actionneur ou capteur) et on met en évidence leur continuité durant le passage au mode 2.

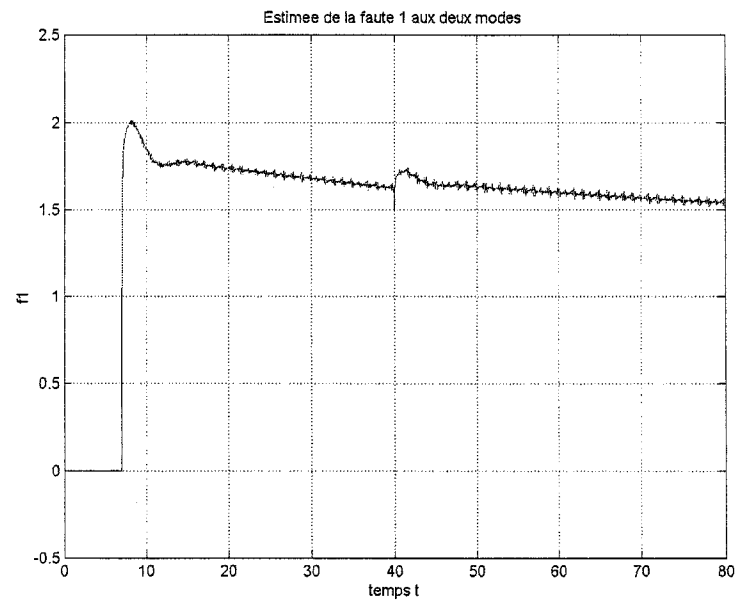


Figure 3.9 Détection et isolation de faute dans l'actionneur

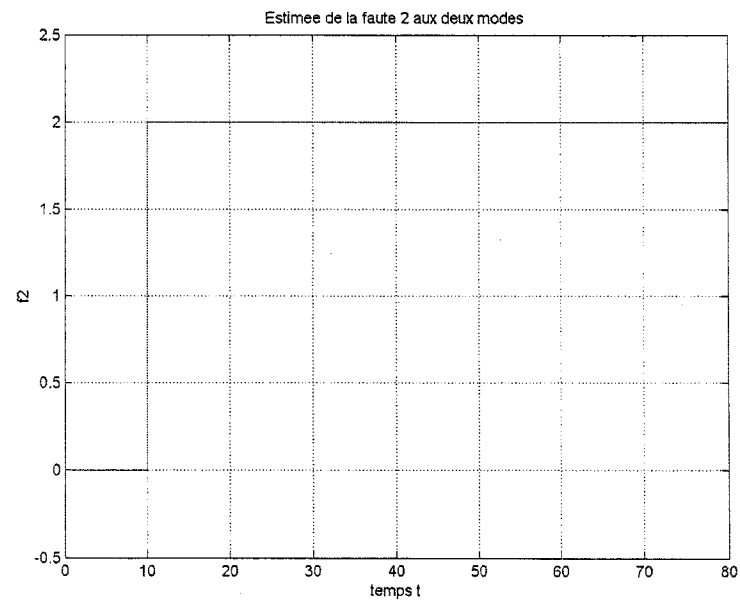


Figure 3.10 Détection et isolation de faute dans le capteur

### 3.4.7 Exemple numérique d'isolation : cas de fautes sur deux capteurs et un actionneur

Comme précédemment, on considère un système à deux modes dont les taux de transition sont donnés par:

$$\lambda = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.3 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Les modèles dynamiques du système sont respectivement :

*Mode 1*

$$A(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F(1) = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0.22 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(1) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$F_y(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 & 0.01 \\ 0 & 0.1 & 1 \\ 0 & 1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$C_y(1) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D_y(1) = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

*Mode 2*

$$A(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F(2) = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(2) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$F_y(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 & 0.01 \\ 0 & 0.1 & 1 \\ 0 & 1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$C_y(2) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D_y(2) = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

### *Simulation*

Les fautes ont lieu dans le système comme suit :

- une faute affecte l'actionneur à l'instant  $t = 7$  au mode 1 avec une amplitude de 2 et continue jusqu'en mode 2;
- une faute affecte le capteur 1 à l'instant  $t = 10$  au mode 1 avec une amplitude de 2 et continue durant le mode 2 avec la même amplitude;
- une faute affecte le capteur 2 à l'instant  $t = 15$  au mode 1 avec une amplitude de 2 et continue durant le mode 2 avec la même amplitude. À chaque instant  $t$  et sur un intervalle de temps  $T$ , des seuils sont calculés de sorte à voir si l'une des composantes du résidu a dépassé la valeur minimale à cause d'une faute. L'intervalle de détection est pris à  $T = 5$  périodes. On considère une perturbation  $w(t)$  nulle.

En résolvant le LMI (1.9), on obtient les paramètres du filtre suivants :

*Mode 1:*

$$\begin{aligned}
 K(1) &= \begin{bmatrix} -21.6159 & -20.6987 \\ -0.1686 & -0.1697 \end{bmatrix} \\
 L(1) &= \begin{bmatrix} 7.7507 & -0.0714 & -0.0692 \\ -0.2802 & 0.0025 & 0.0026 \end{bmatrix} \\
 M(1) &= \begin{bmatrix} -0.4333 & -0.4362 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 \end{bmatrix} \\
 N(1) &= \begin{bmatrix} 0.1573 & -0.0014 & -0.0014 \\ -0.9259 & -0.0926 & 1.0185 \\ -0.9260 & 1.0186 & -0.0926 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

*Mode 2:*

$$\begin{aligned}
 K(2) &= \begin{bmatrix} -21.6128 & -20.8584 \\ -0.2100 & -0.2111 \end{bmatrix} \\
 L(2) &= \begin{bmatrix} 7.8753 & -0.0717 & -0.0715 \\ -0.2642 & 0.0024 & 0.0024 \end{bmatrix} \\
 M(2) &= \begin{bmatrix} -0.4329 & -0.4350 \\ -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} \\
 N(2) &= \begin{bmatrix} 0.1603 & -0.0015 & -0.0015 \\ -0.9259 & -0.0926 & 1.0185 \\ -0.9259 & 1.0185 & -0.0926 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

La valeur de  $\gamma$  est de : 1.0954.

Ainsi, en utilisant la procédure de détection, les résultats affichés sont :

une faute a lieu au mode 1 dans l'actionneur à l'instant  $t_1 = 7$ ;  
 une faute a lieu au mode 1 dans le capteur 1 à l'instant  $t_1 = 10$ ;  
 une faute a lieu au mode 1 dans le capteur 2 à l'instant  $t_1 = 15$ ;  
 une faute a lieu au mode 2 dans l'actionneur à l'instant  $t_2 = 40$ ;  
 une faute a lieu au mode 2 dans le capteur 1 à l'instant  $t_2 = 40$ ;  
 une faute a lieu au mode 2 dans le capteur 2 à l'instant  $t_2 = 40$ .

Ainsi, les fautes sont détectées à l'instant précis où elles ont lieu, leur continuité au mode 2 est aussi démontrée. Comme on peut le voir sur les courbes suivantes, les résidus montrent la présence des fautes dans les deux modes à l'instant même où elles ont lieu, on localise aussi leurs origines (actionneur, capteur 1 ou capteur 2) et on met en évidence leur continuité durant le passage au mode 2.



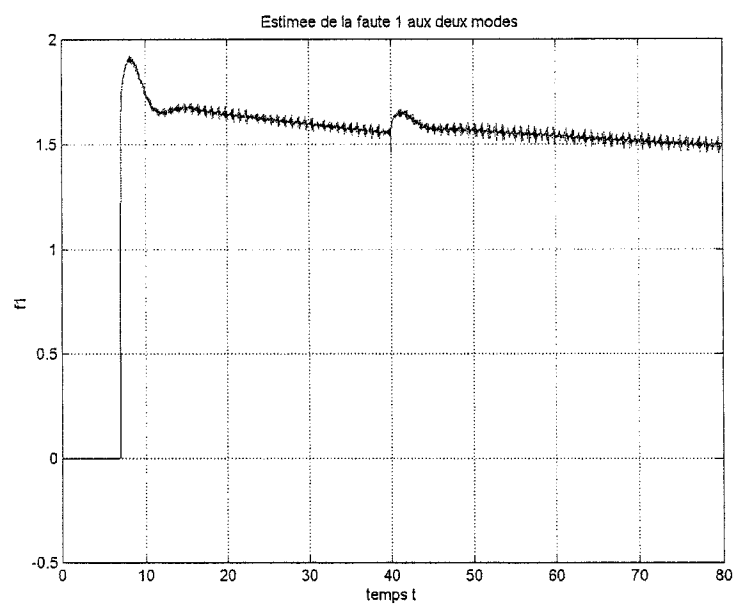


Figure 3.11 Détection et isolation de faute dans l'actionneur

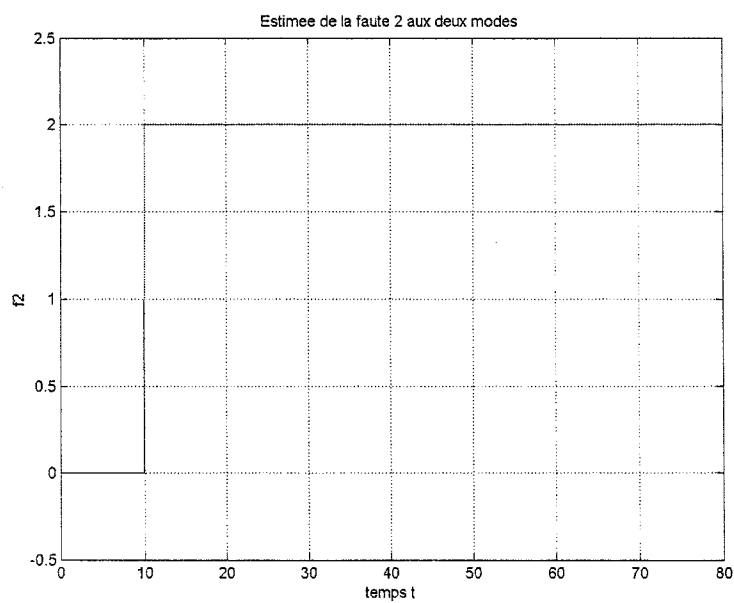


Figure 3.12 Détection et isolation de faute dans le capteur 1

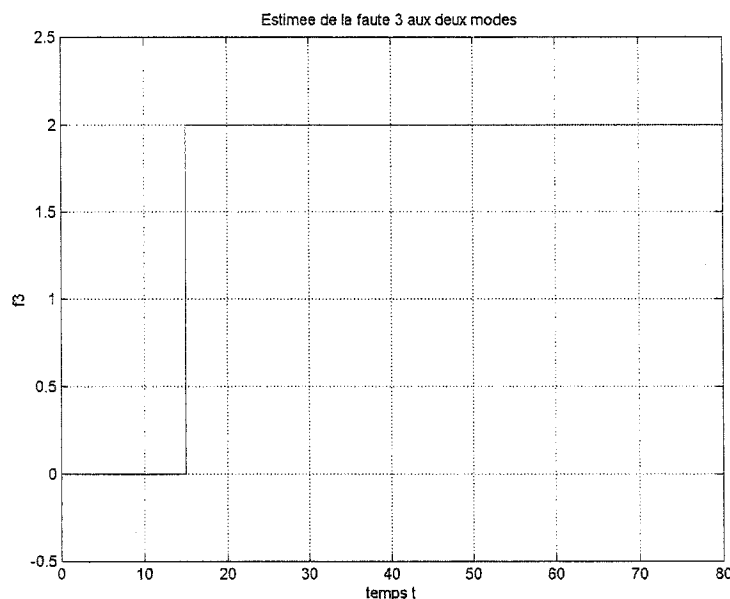


Figure 3.13 Détection et isolation de faute dans le capteur 2

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, il a été question de l'application de l'approche  $H_\infty$  aux systèmes linéaires à sauts markoviens. Les conditions pour le design de l'observateur de détection ont été formulées sous forme d'inégalités matricielles linéaires. L'approche utilisée est basée sur l'estimation du vecteur faute, ce qui permet de sensibiliser le résidu (estimee du vecteur faute) aux fautes et minimiser l'effet des perturbations ou encore des fautes sans intérêt. Les résultats obtenus pour le cas de la détection et ceux pour le cas de l'isolation montrent que l'on peut détecter et isoler une faute de manière très précise. L'isolation, plus spécialement, est basée sur la comparaison de chacune des composantes du vecteur faute à celle d'un seuil calculé à partir du modèle sans fautes du procédé. Les exemples considérés pour l'isolation de faute dans des actionneurs et des capteurs montrent bien que les fautes ayant lieu dans ces deux appareils à la fois sont décelables et localisables.

## CHAPITRE 4

### DÉTECTION ET ISOLATION DE FAUTES DANS LES SYSTÈMES LINÉAIRES À SAUTS MARKOVIENS PAR L'OBSERVATEUR À ENTRÉE INCONNUE

Dans le présent chapitre, on s'intéresse à la détection et l'isolation de fautes dans les systèmes linéaires à sauts markoviens par l'utilisation d'un observateur à entrée inconnue. On fera d'abord un bref aperçu de la méthode de détection par un observateur d'état. On expliquera ensuite la problématique puis on détaillera la technique de l'observateur à entrée inconnue que l'on appliquera par la suite à la détection et l'isolation de fautes. Des exemples numériques illustreront les résultats obtenus pour des systèmes linéaires à sauts markoviens.

#### 4.1 Détection de fautes par un observateur et un estimateur d'état

Pour illustrer comment la méthode de détection et d'isolation de fautes est réalisable par un observateur d'état, on s'intéresse au cas d'un système linéaire déterministe. On adopte ainsi une représentation dans l'espace d'état (Isermann, 1997) telle que:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = C_y x(t) \end{cases}$$

$x(t)$  : variable d'état à l'instant  $t$

$u(t)$  : variable de commande à l'instant  $t$

$y(t)$  : variable de sortie à l'instant  $t$

$A$ ,  $B$  et  $C_y$  sont des matrices invariantes.

Un observateur d'état est utilisé pour reconstruire les variables d'état non mesurables en se basant sur les entrées et les sorties mesurées. On suppose que le filtre a la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + He(t) \\ e(t) = y(t) - C_y\hat{x}(t) \end{cases}$$

$e(t)$  : erreur d'estimation de sortie.  $H$  : coefficient à ajuster.

Par ailleurs, la dynamique de l'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) = [A - HC_y]\tilde{x}(t) \end{cases}$$

Lorsque l'observateur est stable, l'erreur décroît asymptotiquement de sorte que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0$$

ce qui est possible par un choix judicieux du paramètre  $H$ .

Tenant compte, maintenant, des bruits et des fautes qui peuvent affecter le système, le modèle devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Dw(t) + Bu(t) + F_a f_a(t) \\ y(t) = C_y x(t) + F_s f_s(t) \end{cases}$$

$w(t)$  : variable de perturbation inconnue à l'instant  $t$

$f_a(t)$  : faute sur l'actionneur à l'instant  $t$

$f_s(t)$  : faute sur le capteur à l'instant  $t$

$A, B, D, C_y, F_a$  et  $F_s$  : des matrices invariantes de dimensions connues

et les relations suivantes sont vérifiées lorsque le terme de perturbation  $w(t)$  est nul:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = [A - HC_y]\tilde{x}(t) + F_a f_a(t) - HF_s f_s(t) \\ e(t) = C_y \tilde{x}(t) + F_s f_s(t) \end{cases}$$

L'idée principale est que la détection est basée sur l'expression de la différence entre la variable de sortie mesurée et celle observée par le filtre. Dans ce qui suit, la méthode de détection et d'isolation de fautes adoptée repose sur un raisonnement similaire qui est appliqué aux systèmes linéaires à sauts markoviens.

## 4.2 Position du problème

Comme on vient de le voir, la plupart des techniques de détection et d'isolation de fautes sont basées sur l'observation des sorties mesurées du procédé et de celles estimées. Les systèmes réels sont toujours sujets à des entrées inconnues qui peuvent agir soit comme des perturbations, des bruits ou bien des incertitudes sur le modèle. Par conséquent, comme c'est illustré dans la littérature, l'observation et la reconstruction des états et des sorties de ces systèmes requièrent l'utilisation d'observateurs à entrée inconnue (Kudva, 1980), (Hou, 1994), (Darouach, 1994) et (Trinh, 2000) pour pouvoir déduire l'état tout en ignorant les entrées inconnues.

Aussi, l'observateur à entrée inconnue est un observateur qui permet à l'état estimé d'approcher asymptotiquement l'état réel du système tout en rejetant la perturbation, le bruit et les incertitudes. En effet, l'erreur d'estimation d'état est complètement découplée de ces entrées. Puisque le résidu exprime la différence

entre la sortie mesurée et celle estimée, il informe de manière directe de la présence d'une faute dans le procédé. De nombreux auteurs (Amato, 2002), (Chen, 1996), (Chen, 1999), (Hou, 1994), (Parlangeli, 2003), (Yang, 1998) ont exploité cette propriété de découplage de l'erreur d'estimation des entrées inconnues et ont appliqué les observateurs à entrée inconnue à la détection et l'isolation de fautes dans les systèmes. La trace de la faute d'intérêt est facilement décelable lorsque l'effet des perturbations et/ou des autres fautes est atténué au niveau du résidu. Dans ce qui suit, on appliquera la détection et l'isolation de fautes par un observateur à entrée inconnue aux systèmes linéaires à sauts markoviens.

On considère le système suivant qui est sujet à une entrée inconnue. Le principal objectif est de rendre le résidu sensible à une faute bien spécifique tout en le découplant complètement des autres entrées inconnues. Le modèle adopté est tel que :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(s(t))x(t) + D(s(t))w(t) + B(s(t))u(t) \\ y(t) = C_y(s(t))x(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

où :

$\{s(t), t \geq 0\}$  : processus de Markov prenant des valeurs dans  $S$  décrivant l'évolution du système d'un mode à un autre,

$x(t)$  : variable d'état à l'instant  $t$

$w(t)$  : variable d'entrée inconnue à l'instant  $t$

$u(t)$  : variable de commande à l'instant  $t$

$y(t)$  : variable de sortie à l'instant  $t$

$A(i)$ ,  $D(i)$ ,  $B(i)$  et  $C_y(i)$  sont des matrices invariantes au mode  $i$ . De plus et sans perte de généralité, on suppose que  $D(i)$  est de rang complet.

Le système peut devenir défectueux à n'importe quel moment, que ce soit par la présence d'une seule ou de plusieurs fautes sur les capteurs ou les actionneurs.

Concernant la représentation d'une faute dans le système : sur le capteur,  $f_s(t)$  engendrera une sortie entâchée d'erreurs représentée par :

$$y(t) = y_R(t) + f_s(t) \quad (4.2)$$

où :

$y_R(t)$  : sortie réelle du système,

$f_s(t)$  : faute additive sur le capteur.

D'un autre côté, la réponse de l'actionneur à une commande avec une faute sur l'actionneur  $f_a(t)$  peut être représentée mathématiquement par :

$$u_R(t) = u(t) + f_a(t) \quad (4.3)$$

où :

$u(t)$  : entrée réelle du système,

$f_a(t)$  : faute additive sur l'actionneur.

Le but étant de détecter une faute aussitôt qu'elle a lieu, trois principales étapes doivent donc être franchies :

- Design de l'observateur à entrée inconnue : il faudra d'abord définir les conditions pour la conception de l'observateur à entrée inconnue pour les systèmes linéaires à sauts markoviens de façon à rendre l'erreur d'estimation complètement découplée des entrées inconnues et des perturbations.
- Génération de résidu : en effet, le résidu devrait donner suffisamment d'information sur la faute d'intérêt. Pour le cas de l'isolation avec des observateurs à entrée inconnue, ceci est réalisé en sensibilisant le résidu structuré à toutes les fautes sauf une seule.

- Évaluation du résidu : à chaque instant, le résidu devrait être calculé et évalué pour vérifier si une faute a eu lieu ou pas. Pour notre cas, l'évaluation tient compte de la sensibilité des observateurs à entrée inconnue à un groupe de fautes et leur insensibilité aux autres pour examiner la présence d'une faute.

### 4.3 Détection et isolation de faute par un observateur à entrée inconnue

On s'intéresse dans un premier temps aux bases de conception d'un observateur à entrée inconnue. Comme il a été expliqué plutôt, le principe de cet observateur est de rendre l'erreur d'estimation d'état découplée des entrées inconnues pour amener ainsi l'estimée à approcher l'état réel du système. L'observateur est alors défini par:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = K_A(s(t))z(t) + K_B(s(t))y(t) + U(s(t))B(s(t))u(t) \\ \hat{x}(t) = z(t) + H(s(t))y(t) \end{cases} \quad (4.4)$$

L'observateur en mode  $i$  est décrit par le schéma de la figure 4.1 :

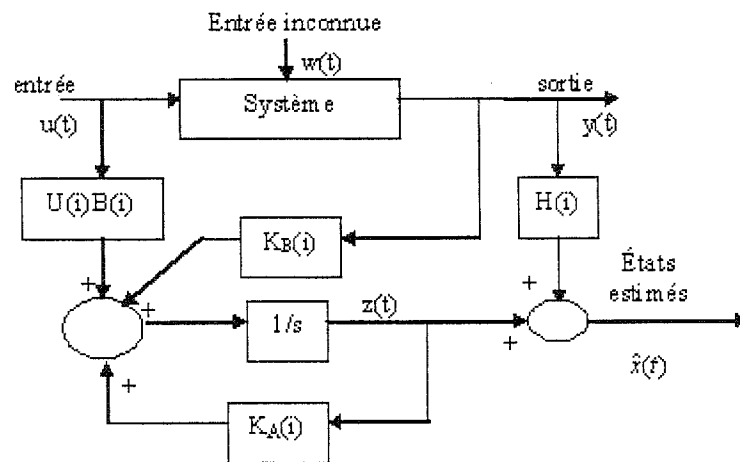


Figure 4.1 Observateur à entrée inconnue (Chen, 1999)



Pour un mode  $i$ , l'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) = [I - H(i)C_y(i)]x(t) - z(t)$$

Pour des raisons simplificatrices dans l'expression des conditions de réalisation de l'observateur à entrée inconnue, on pose :

$$K_B(i) = K_{B_1}(i) + K_{B_2}(i)$$

Ainsi, la dynamique de l'erreur d'estimation est :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= [A(i) - H(i)C_y(i)A(i) - K_{B_1}(i)C_y(i)]e(t) \\ &+ [(A(i) - H(i)C_y(i)A(i) - K_{B_1}(i)C_y(i))H(i) - K_{B_2}(i)]y(t) \\ &+ [A(i) - H(i)C_y(i)A(i) - K_{B_1}(i)C_y(i) - K_A(i)]z(t) \\ &+ [I - H(i)C_y(i)]D(i)w(t) + [(I - H(i)C_y(i)) - U(i)]B(i)u(t) \end{aligned}$$

L'observateur à entrée inconnue existe si les relations suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} (I - H(i)C_y(i))D(i) = 0 \\ U(i) = I - H(i)C_y(i) \\ K_A(i) = A(i) - H(i)C_y(i)A(i) - K_{B_1}(i)C_y(i) \\ K_{B_2}(i) = K_A(i)H(i) \\ K_B(i) = K_{B_1}(i) + K_{B_2}(i) \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Alors, on obtient :

$$\dot{e}(t) = K_A(i)e(t)$$

**Objectif de conception :**

L'objectif de design de l'observateur à entrée inconnue est de satisfaire les relations précédentes tout en garantissant la stabilité de l'erreur d'estimation d'état.

Le lemme suivant exprime les conditions nécessaires et suffisantes pour la vérification de la première relation du système d'équations (4.5) :

**Lemme 4.1 :**

Étant donné le système (4.1),  $(I - H(i)C_y(i))D(i) = 0$  est résoluble si et seulement si :  $\text{rang}(C_y(i)D(i)) = \text{rang}(D(i))$ .

Une solution particulière est :

$$H^*(i) = D(i)[(C_y(i)D(i))^T C_y(i)D(i)]^{-1} (C_y(i)D(i))^T$$

**Démonstration :**

Similairement à la démonstration illustrée dans (Chen, 1999), et pour un mode  $i$ , on a :

Condition nécessaire :

Connaissant  $C_y(i)$  et  $D(i)$ , lorsque  $(I - H(i)C_y(i))D(i) = 0$  a une solution  $H(i)$  alors :  $H(i)C_y(i)D(i) = D(i)$  ou encore  $(C_y(i)D(i))^T H(i)^T = D(i)^T$

Autrement dit :  $D(i)^T$  appartient à l'espace image de  $(C_y(i)D(i))^T$  ce qui amène à :

$$\text{rang}(D(i)^T) \leq \text{rang}((C_y(i)D(i))^T)$$

soit :

$$\text{rang}(D(i)) \leq \text{rang}(C_y(i)D(i))$$

Néanmoins, en utilisant le résultat, bien connu, suivant :

$$\text{rang}(C_y(i)D(i)) \leq \text{rang}(C_y(i)) \text{ et } \text{rang}(C_y(i)D(i)) \leq \text{rang} D(i)$$

On obtient  $\text{rang}(C_y(i)D(i)) \leq \min[\text{rang}(C_y(i)), \text{rang}(D(i))] \leq \text{rang}(D(i))$

Ainsi,  $\text{rang}(C_y(i)D(i)) = \text{rang}(D(i))$  et la condition nécessaire est démontrée.

Condition suffisante :

lorsque  $\text{rang}(C_y(i)D(i)) = \text{rang}(D(i))$  est vraie,  $C_y(i)D(i)$  est une matrice de rang complet (puisque  $D(i)$  est supposé de rang complet), et donc une inverse à gauche de  $(C_y(i)D(i))$  existe :

$$(C_y(i)D(i))^+ = [(C_y(i)D(i))^T(C_y(i)D(i))]^{-1}(C_y(i)D(i))^T$$

Il est évident que  $H(i) = D(i)[C_y(i)D(i)]^+$  est une solution de  $(I - H(i)C_y(i))D(i) = 0$ , et le lemme est démontré.

Le théorème suivant résume les conditions et les étapes de conception d'un observateur à entrée inconnue.

**Théorème 4.1 :**

Étant donné le système (4.1), un observateur à entrée inconnue de la forme (4.4) existe si les relations suivantes sont satisfaites :

1.  $\text{rang}(C_y(i)D(i)) = \text{rang}(D(i))$
2. il existe  $P = (P(1), \dots, P(N))$  des matrices symétriques et définies-positives et  $Y = (Y(1), \dots, Y(N))$  des matrices de sorte que :

$$A_1^T(i)P(i) + P(i)A_1(i) - C_y^T(i)Y^T(i) - Y(i)C_y(i) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}P(j) < 0$$

avec :  $Y(i) = P(i)K_{B_1}(i)$  et  $A_1(i) = A(i) - H^*(i)C_y(i)A(i)$

3. les paramètres de design du filtre vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} H^*(i) = D(i)[(C_y(i)D(i))^T C_y(i)D(i)]^{-1}(C_y(i)D(i))^T \\ U(i) = I - H(i)C_y(i) \\ K_A(i) = A_1(i) - K_{B_1}(i)C_y(i) \\ K_{B_2}(i) = K_A(i)H^*(i) \\ K_{B_1}(i) = P^{-1}(i)Y(i) \\ K_B(i) = K_{B_1}(i) + K_{B_2}(i) \end{array} \right.$$

où :

$$A_1(i) = A(i) - H^*(i)C_y(i)A(i)$$

et il en découle que l'erreur d'estimation d'état est stochastiquement stable.

### Démonstration :

Pour un mode donné  $i$ , un observateur à entrée inconnue existe si les relations (4.5) sont vérifiées et que l'erreur d'estimation est stochastiquement stable. La première relation de (4.5) est vraie si et seulement si :  $\text{rang}(C_y(i)D(i)) = \text{rang}(D(i))$  d'après le lemme 4.1. La solution de cette équation (lemme 4.1) est donnée par :  $H^*(i) = D(i)[(C_y(i)D(i))^T C_y(i)D(i)]^{-1}(C_y(i)D(i))^T$ .

En substituant chacun des termes de (4.5), on obtient une relation équivalente à la condition 3, ce qui implique que l'erreur d'estimation est de la forme  $\dot{e}(t) = K_A(i)e(t)$ . D'après le théorème 3.1, démontrer que ce modèle est stable stochas-

tiquement est équivalent à démontrer qu'il existe  $P = (P(1), \dots, P(N))$  tel que:

$$K_A^T(i)P(i) + P(i)K_A(i) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}P(j) < 0$$

Substituant  $K_A(i) = A_1(i) - K_{B_1}(i)C_y(i)$  dans le LMI précédent, avec  $A_1(i) = A(i) - H^*(i)C_y(i)A(i)$  on obtient :

$$A_1^T(i)P(i) + P(i)A_1(i) - C_y^T(i)K_{B_1}^T(i)P(i) - P(i)K_{B_1}(i)C_y(i) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}P(j) < 0$$

Poser  $Y(i) = P(i)K_{B_1}(i)$  dans le LMI est équivalent à :

$$A_1^T(i)P(i) + P(i)A_1(i) - C_y^T(i)Y^T(i) - Y(i)C_y(i) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}P(j) < 0$$

Ce qui n'est autre que la condition 2 du théorème 4.1. On en déduit aussi le paramètre  $K_{B_1}(i)$ .

Le théorème est ainsi démontré.

#### 4.3.1 Détection de faute

Dépendamment du fait qu'on veuille effectuer une détection ou une isolation de faute, la procédure de génération et d'évaluation du résidu serait différente. En effet, ici on considère un système linéaire à sauts markoviens sujet à des entrées inconnues pour lequel on s'intéresse à la détection de faute uniquement. Le système peut être sujet à des fautes sur le capteur et/ou sur l'actionneur et l'évaluation du résidu devrait permettre de déceler l'instant où le système devient défectueux. Le modèle adopté est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(i)x(t) + B(i)u(t) + D(i)w(t) + B(i)f_a(t) \\ y(t) = C_y(i)x(t) + f_s(t) \end{cases} \quad (4.6)$$

$f_a(t)$  : faute sur l'actionneur pouvant survenir à l'instant  $t$

$f_s(t)$  : faute sur le capteur pouvant survenir à l'instant  $t$

En appliquant le principe de détection de faute avec un observateur d'état à entrée inconnue à ce système, on peut générer le résidu, tel que :

$$r(t) = y(t) - C_y(i)\hat{x}(t) \quad (4.7)$$

ce qui est équivalent à :

$$r(t) = C_y(i)e(t) + f_s(t) \quad (4.8)$$

où :  $e(t)$  est l'erreur d'estimation de l'état du système.

#### 4.3.1.1 Évaluation du résidu

Après le design de l'observateur à entrée inconnue, la détection est effectuée à partir de l'observation et de l'évaluation du résidu. La plupart du temps ce dernier est comparé à un seuil bien défini. Ici, dépendamment du cas étudié, on définira l'évaluation de résidu adéquate.

Tel que mentionné auparavant, le résidu s'exprime comme suit :

$$r(t) = y(t) - \hat{y}(t)$$

où:

$$\hat{y}(t) = C_y(i)\hat{x}(t)$$

ce qui donne le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = (A_1(i) - K_{B_1}(i)C_y(i))e(t) + U(i)B(i)f_a(t) - H(i)\dot{f}_s(t) - K_B(i)f_s(t) \\ r(t) = C_y(i)e(t) + f_s(t) \end{cases}$$

On voit bien d'après cette expression que la faute sur le capteur a un effet direct sur le résidu.

Comme la dynamique du modèle du système sans fautes est disponible, elle est utilisée pour déterminer le seuil de détection. Ainsi, ayant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(i)x(t) + D(i)w(t) + B(i)u(t) \\ y(t) = C_y(i)x(t) \\ r(t) = y(t) - C_y(i)\hat{x}(t) \end{cases}$$

en posant  $f^T(t) = \begin{bmatrix} f_a(t) & f_s(t) \end{bmatrix}^T$ , à chaque instant  $t$ , on calcule :

$$J_{th} = E(\sup_{f=0,w,u} \|r(t)\|_T)$$

La perturbation étant inconnue, elle est prise à sa valeur maximale. Pour ce qui est de la commande, on considère qu'elle est nulle.

La détection de la faute a lieu durant le fonctionnement réel du système sur l'intervalle de temps  $T$  :

- si  $\|r(t)\|_T > J_{th}$ , alors une faute a lieu;
- sinon, aucune faute n'est détectée,

avec :  $\|r(t)\|_T = [\int_{t_1}^{t_2} r^T(t)r(t)dt]^{1/2}$

$T = t_2 - t_1$  et  $t \in [t_1, t_2]$

#### 4.3.1.2 Exemple numérique de détection : cas de fautes sur les capteurs

On considère un système à deux modes dont les taux de transition sont donnés par:

$$\lambda = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.3 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Les modèles dynamiques du système sont donnés respectivement par :

*Mode 1*

$$A(1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D(1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B(1) = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.15 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$C_y(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Mode 2*

$$A(2) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned}
D(2) &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
B(2) &= \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.15 \\ 0.1 \end{bmatrix} \\
C_y(2) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

### *Simulation*

On suppose que le système passe du mode 1 au mode 2 à  $t = 40$  et qu'une faute a lieu dans le capteur 1 à  $t = 7$  dans le mode 1 et continue durant le passage au mode 2, avec une amplitude constante de 5. Quant au capteur 2, il ne subit aucune défectuosité.

La perturbation est supposée être :  $w(t) = 10\sin(x_1(t) + 1)$ . De plus, vu qu'on n'a aucun objectif de contrôle, le terme de commande sera considéré comme nul, soit :  $u(t) = 0$  et la perturbation maximale est  $W(t) = 10 \forall t \geq 0$ .

L'intervalle de détection est pris comme étant  $T = 5$  périodes pour les deux modes.

D'après le théorème 4.1, les paramètres de design de l'observateur sont :

*Mode 1:*

$$H^*(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_A(1) = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0 & 1.3682 \\ 0.0000 & -1 & -0.9016 \end{bmatrix}$$

$$K_B(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0000 \\ -1 & -1.3682 \\ 0 & -0.0984 \end{bmatrix}$$

$$U(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Mode 2:*

$$H^*(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_A(2) = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0 & 1.2087 \\ -0.0000 & -1 & -0.8526 \end{bmatrix}$$

$$K_B(2) = \begin{bmatrix} 0 & -0.0000 \\ -1 & -1.2087 \\ 0 & -1.1474 \end{bmatrix}$$

$$U(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi, en utilisant la procédure de détection précédente, les résultats affichés sont :

une faute est détectée durant le mode 1 à  $t = 7$ ;

une faute est détectée durant le mode 2 à  $t = 40$ .

Le code permet donc de détecter la présence d'une faute et montre qu'elle continue en mode 2. L'évolution de la norme du résidu pour les deux modes est telle que :

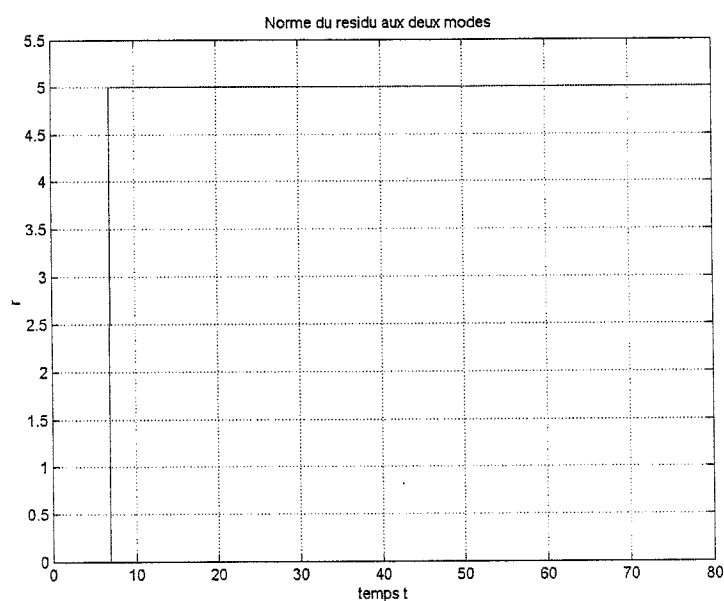


Figure 4.2 Détection d'une faute via UIO

Comme on le voit sur la courbe, la norme du résidu montre la présence de la faute au moment même où elle a lieu, c'est-à-dire à  $t = 7$  et permet de rendre compte de sa continuité dans les deux modes. À ce stade, on ne peut se prononcer sur l'origine de la faute et il est seulement possible de déceler l'occurrence d'une faute au moment où elle a lieu.

### 4.3.2 Isolation de fautes

Dans cette section, on s'intéresse à localiser la faute en déterminant l'endroit précis où elle a lieu et le plus tôt possible. Lorsqu'on utilise des observateurs à entrée inconnue, le problème d'isolation de fautes consiste à rendre chaque résidu généré par un observateur sensible aux fautes dans tous les capteurs (actionneurs) excepté un seul (Chen, 1999).

#### 4.3.2.1 Isolation de fautes dans les capteurs

Pour réaliser la détection et l'isolation de fautes dans les capteurs via les observateurs à entrée inconnue, on suppose que tous les actionneurs sont sans fautes. Les équations du système sont donc :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(i)x(t) + D(i)w(t) + B(i)u(t) \\ y^j(t) = C_y^j(i)x(t) + f_s^j(t) \end{cases} \quad (4.9)$$

avec :

$C_y^j(i)$  obtenu en supprimant la  $j$ ème ligne de  $C_y(i)$

$y^j(t)$  obtenu en supprimant la  $j$ ème ligne de  $y(t)$

$j = 1, \dots, m$ .

À partir de cette description, on peut construire  $m$  (nombre de capteurs) observateurs à entrée inconnue de la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}^j(t) = K_A^j(i)z^j(t) + K_B^j(i)y^j(t) + U^j(i)B(i)u(t) \\ \hat{x}^j(t) = z^j(t) + H^j(i)y^j(t) \end{cases} \quad (4.10)$$

Ainsi et en suivant le même raisonnement que précédemment, les conditions qui doivent être satisfaites pour la conception de l'observateur à entrée inconnue et les paramètres de design d'un observateur sont données par le théorème suivant.

**Théorème 4.2 :**

Étant donné le système (4.9), un observateur à entrée inconnue de la forme (4.10) existe si les relations suivantes sont satisfaites :

1.  $\text{rang}(C_y^j(i)D(i)) = \text{rang}(D(i))$
2. il existe  $P = (P(1), \dots, P(N))$  des matrices symétriques et définies-positives et  $Y = (Y(1), \dots, Y(N))$  des matrices de sorte que :
 
$$A_1^{jT}(i)P(i) + P(i)A_1^j(i) - C_y^{jT}(i)Y^T(i) - Y(i)C_y^j(i) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}P(j) < 0$$
 avec :  $Y(i) = P(i)K_{B_1}^j(i)$  et  $A_1^j(i) = A(i) - H^{j*}(i)C_y^j(i)A(i)$
3. les paramètres de design du filtre vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} H^{j*}(i) = D(i)[(C_y^j(i)D(i))^T C_y^j(i)D(i)]^{-1}(C_y^j(i)D(i))^T \\ U^j(i) = I - H^{j*}(i)C_y^j(i) \\ K_A^j(i) = A_1^j(i) - K_{B_1}^j(i)C_y^j(i) \\ K_{B_2}^j(i) = K_A^j(i)H^{j*}(i) \\ K_{B_1}^j(i) = P^{-1}(i)Y(i) \\ K_B^j(i) = K_{B_1}^j(i) + K_{B_2}^j(i) \end{array} \right.$$

où :

$$A_1^j(i) = A(i) - H^{j*}(i)C_y^j(i)A(i)$$

et il en découle que l'erreur d'estimation d'état est stochastiquement stable.

**Démonstration :** la démonstration est similaire à celle du théorème 4.1.

#### 4.3.2.2 Isolation de fautes dans les actionneurs

Pour concevoir les observateurs de détection et d'isolation de fautes dans les actionneurs, on suppose que les capteurs sont sans fautes. Ainsi, le système avec fautes est modélisé comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(i)x(t) + D(i)w(t) + B^j(i)(f_a^j(t) + u^j(t)) + b^j(i)(u_j(t) + f_{aj}(t)) \\ y(t) = C_y(i)x(t) \end{cases} \quad (4.11)$$

où :

$B^j(i)$  est obtenu en supprimant la  $j$ ème colonne de  $B(i)$

$b^j(i)$  est la  $j$ ème colonne de  $B(i)$

$u_j(t)$  est la  $j$ ème composante de  $u(t)$

$w^j(t)$  est obtenu en supprimant la  $j$ ème composante  $u_j(t)$

Pour pouvoir isoler la faute à détecter des autres fautes et entrées inconnues, on pose :

$$D^j(i) = \begin{bmatrix} D(i) & b^j(i) \end{bmatrix}$$

$$w^j(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ u_j(t) + f_{aj}(t) \end{bmatrix}$$

Ainsi, le système peut être modélisé par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(i)x(t) + D^j(i)w^j(t) + B^j(i)(f_a^j(t) + u^j(t)) \\ y(t) = C_y(i)x(t) \end{cases} \quad (4.12)$$

$$j = 1, \dots, p$$

À partir de cette description, on peut construire  $p$  (nombre d'actionneurs) observateurs à entrée inconnue de la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}^j(t) = K_A^j(i)z^j(t) + K_B^j(i)y(t) + U^j(i)B^j(i)u^j(t) \\ \hat{x}^j(t) = z^j(t) + H^j(i)y(t) \end{cases} \quad (4.13)$$

Les conditions pour le design d'un observateur à entrée inconnue sont détaillées dans le théorème suivant.

**Théorème 4.3:**

Étant donné le système (4.11), un observateur à entrée inconnue de la forme (4.13) existe si les relations suivantes sont satisfaites :

1.  $\text{rang}(C_y(i)D^j(i)) = \text{rang}(D^j(i))$
2. il existe  $P = (P(1), \dots, P(N))$  des matrices symétriques et définies-positives et  $Y = (Y(1), \dots, Y(N))$  des matrices de sorte que :

$$A_1^{jT}(i)P(i) + P(i)A_1^j(i) - C_y^T(i)Y^T(i) - Y(i)C_y(i) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}P(j) < 0$$

$$\text{avec : } Y(i) = P(i)K_{B_1}^j(i) \text{ et } A_1^j(i) = A(i) - H^{j*}(i)C_y(i)A(i)$$

3. les paramètres de design du filtre vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} H^{j*}(i) = D^j(i)[(C_y(i)D^j(i))^T C_y(i)D^j(i)]^{-1}(C_y(i)D^j(i))^T \\ U^j(i) = I - H^j(i)C_y(i) \\ K_A^j(i) = A_1^j(i) - K_{B_1}^j(i)C_y(i) \\ K_{B_2}^j(i) = K_A^j(i)H^{j*}(i) \\ K_{B_1}^j(i) = P^{-1}(i)Y(i) \\ K_B^j(i) = K_{B_1}^j(i) + K_{B_2}^j(i) \end{array} \right.$$

où :

$$A_1^j(i) = A(i) - H^{j*}(i)C_y(i)A(i)$$

et il en découle que l'erreur d'estimation d'état est stochastiquement stable.

**Démonstration :** la démonstration est similaire à celle du théorème 4.1.

#### 4.3.3 Évaluation du résidu

Dans le cas de l'isolation, on s'intéresse aux résidus structurés, c'est-à-dire des résidus qui ne sont sensibles qu'à un certain groupe de fautes. L'évaluation sera basée sur cette notion et sur le fait que des quantités résiduelles seront comparées sur des fenêtres de temps décalées d'une période.

On considère  $m(p)$  observateurs à entrée inconnue, la génération de résidu s'exprime



de la manière suivante :

$$r^j(t) = y^j(t) - C_y^j(t)z^j(t)$$

Le seuil de détection pour des fautes ayant lieu dans un même intervalle de temps est défini par :

À chaque instant  $t$  et pour un intervalle de détection  $T = [t_1, t_2]$ , on calcule :

$$\|r^j(t)\|_T = [\int_{t_1}^{t_2} r^{jT}(t)r^j(t)dt]^{1/2}$$

$$\|r^j(t)\|_{T-1} = [\int_{t_1-1}^{t_2-1} r^{jT}(t)r^j(t)dt]^{1/2}$$

Ensuite, on compare les résidus des observateurs à entrée inconnue de sorte que lorsque tous les actionneurs (capteurs) sont sans faute et qu'une faute a lieu dans le  $j$ ème capteur (actionneur), le résidu devra satisfaire :

$$\left| \|r^k(t)\|_T - \|r^k(t)\|_{T-1} \right| > \left| \|r^j(t)\|_T - \|r^j(t)\|_{T-1} \right|$$

pour  $k = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, m(p)$

#### 4.3.3.1 Exemples numériques d'isolation : cas de fautes sur les capteurs

Dans cette section et celle qui suit, des exemples numériques sont considérés pour appuyer les concepts théoriques démontrés auparavant.

##### Exemple 1

Ici aussi, on considère un système à deux modes dont les taux de transition sont

donnés par :

$$\lambda = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.3 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Les modèles dynamiques du système sont respectivement donnés par :

*Mode 1*

$$A(1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B(1) = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.15 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$D(1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_y(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Mode 2*

$$A(2) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B(2) = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.15 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$D(2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_y(2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### *Simulation*

On suppose que le système passe du mode 1 au mode 2 à  $t = 40$  et que trois fautes ont lieu durant le mode 2 :

- la faute 1 a lieu dans le capteur 1 à  $t \geq 50$  avec une amplitude de 3;
- la faute 2 a lieu dans le capteur 2 à  $t \geq 59$  avec une amplitude de 4;
- la faute 3 a lieu dans le capteur 3 à  $t \geq 68$  avec une amplitude de 5.

La perturbation peut être prise comme :  $w(t) = \sin(0.01x_1(t))$ , et comme précédemment on suppose que la commande est nulle :  $u(t) = 0$ .

L'intervalle de détection est pris comme étant  $T = 3$  périodes pour les deux modes. D'après le théorème 4.2, les paramètres de design des 3 observateurs à entrée inconnue sont tels que chaque observateur peut détecter toutes les fautes à l'exception de celle d'un capteur. Ainsi, les paramètres sont donnés par :

Mode 1: UIO-1

$$\begin{aligned}
 H^{1*}(1) &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 K_A^1(1) &= \begin{bmatrix} -0.75 & 1 & 0.25 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.25 & -1 & -0.75 \end{bmatrix} \\
 U^1(1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 K_B^1(1) &= \begin{bmatrix} 0.3199 & -0.3199 \\ -0.7860 & -0.2140 \\ 0.0975 & -0.0975 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

UIO-2

$$\begin{aligned}
 H^{2*}(1) &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 K_A^2(1) &= \begin{bmatrix} -0.7473 & 1 & 0.2527 \\ -0.5114 & 0 & 0.4886 \\ 0.2464 & -1 & -0.7536 \end{bmatrix} \\
 U^2(1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$K_B^2(1) = \begin{bmatrix} 0.3291 & -0.3291 \\ -0.7740 & -0.2260 \\ 0.0969 & -0.0969 \end{bmatrix}$$

*UIO-3*

$$H^{3*}(1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_A^3(1) = \begin{bmatrix} -0.7473 & 1 & 0.2527 \\ -0.5114 & 0 & 0.4886 \\ 0.2464 & -1 & -0.7536 \end{bmatrix}$$

$$U^3(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_B^3(1) = \begin{bmatrix} 0.3291 & -0.3291 \\ -0.7740 & -0.2260 \\ 0.0969 & -0.0969 \end{bmatrix}$$

*Mode 2: UIO-1*

$$H^{1*}(2) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_A^1(2) = \begin{bmatrix} -1.25 & 1 & 0.75 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.75 & -1 & -1.25 \end{bmatrix}$$

$$U^1(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_B^1(2) = \begin{bmatrix} -0.2388 & -0.7612 \\ -0.6934 & -0.3066 \\ 0.3312 & -0.6688 \end{bmatrix}$$

*UIO-2*

$$H^{2*}(2) = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_A^2(2) = \begin{bmatrix} -0.5883 & 0.6 & 0.9151 \\ -0.5559 & 0 & 1.4609 \\ -0.5565 & -1 & -0.8206 \end{bmatrix}$$

$$U^2(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_B^2(2) = \begin{bmatrix} 0.0681 & -0.7361 \\ 0.7944 & -2.5889 \\ 1.5133 & -2.0266 \end{bmatrix}$$

*UIO-3*

$$H^{3*}(2) = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
K_A^3(2) &= \begin{bmatrix} -0.5883 & 0.6 & 0.9151 \\ -0.5559 & 0 & 1.4609 \\ -0.5565 & -1 & -0.8206 \end{bmatrix} \\
U^3(2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
K_B^3(2) &= \begin{bmatrix} 0.0681 & -0.7361 \\ 0.7944 & -2.5889 \\ 1.5133 & -2.0266 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la procédure de détection précédente, les résultats affichés sont :

une faute a lieu durant le mode 2 dans le capteur 1 à  $t = 50$ ;

une faute a lieu durant le mode 2 dans le capteur 2 à  $t = 59$ ;

une faute a lieu durant le mode 2 dans le capteur 3 à  $t = 68$ .

Le code permet donc de détecter et de localiser la présence des fautes. Comme le montrent les courbes sur les figures 4.3, 4.4 et 4.5, chaque observateur à entrée inconnue est sensible à toutes les fautes sauf une seule, ainsi et d'après la procédure d'évaluation du résidu, la comparaison peut être faite à chaque instant pour voir quel capteur est rendu défectueux.

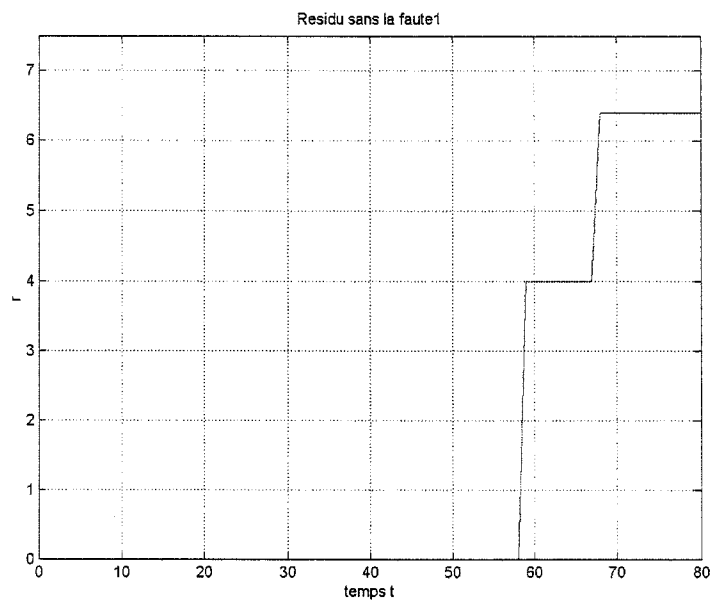


Figure 4.3 Détection et isolation de faute dans les capteurs - UIO-1

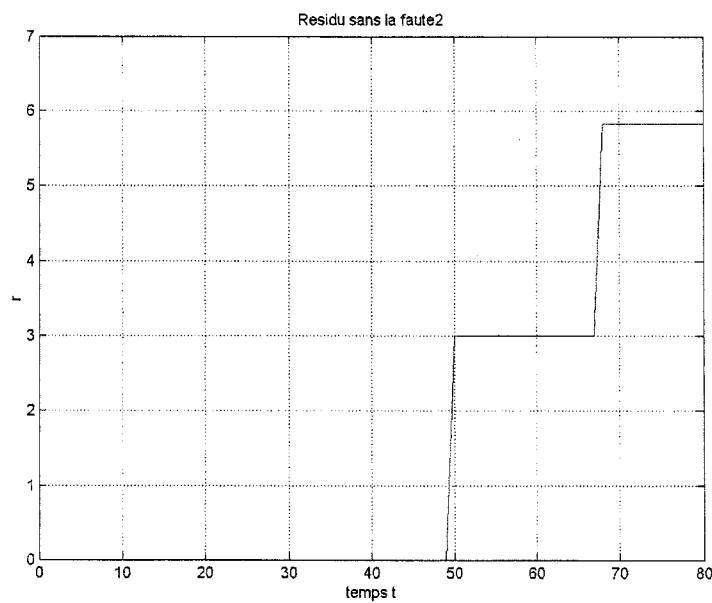


Figure 4.4 Détection et isolation de faute dans les capteurs - UIO-2



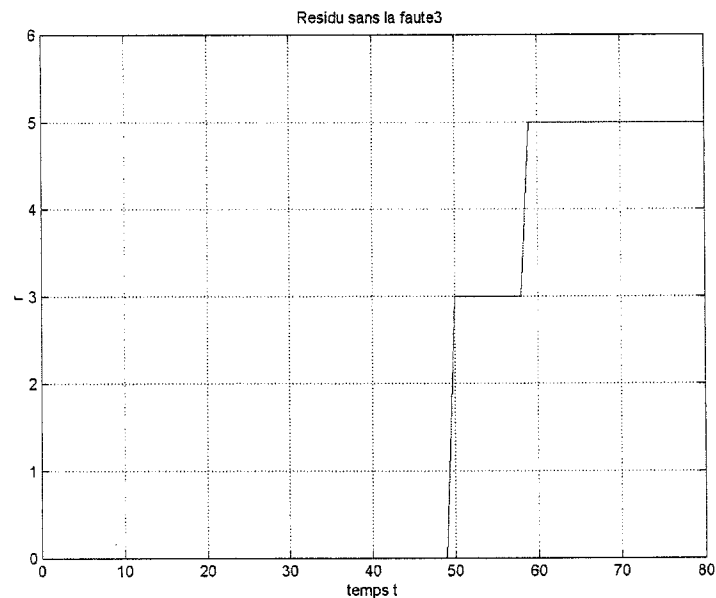


Figure 4.5 Détection et isolation de faute dans les capteurs - UIO-3

### Exemple 2

Ici, on suppose qu'une faute a lieu dans le capteur 1 durant le mode 1 à  $t = 10$  avec une amplitude de 3 et continue dans le mode 2 avec la même amplitude. Les deux autres capteurs sont sans fautes. On voudrait localiser la faute en utilisant la même procédure que précédemment.

La perturbation peut être prise comme étant :  $w(t) = \sin(0.001x_1(t))$  et la commande est supposée nulle,  $u(t) = 0$ .

L'intervalle de détection est pris comme étant  $T = 5$  périodes pour le mode 1.

L'intervalle de détection est pris comme étant  $T = 3$  périodes pour le mode 2.

Le passage au mode 2 a lieu à  $t = 40$ .

Puisqu'on a le même système qu'en exemple 1, alors les paramètres de design des observateurs à entrée inconnue sont exactement les mêmes.

Ainsi, en utilisant la procédure de détection précédente, les résultats affichés sont :

une faute est détectée durant le mode 1 dans le capteur 1 à  $t = 10$ ;

une faute est détectée durant le mode 2 dans le capteur 1 à  $t = 40$ .

Le détecteur est capable de localiser la faute et de détecter sa continuité jusqu'au mode 2. Les courbes sur les figures 4.6, 4.7 et 4.8 montrent ce fait.

En effet, lorsque la faute au niveau du capteur 1 n'est pas prise en compte dans l'observation, le résidu est nul pour des capteurs 2 et 3 non défectueux.

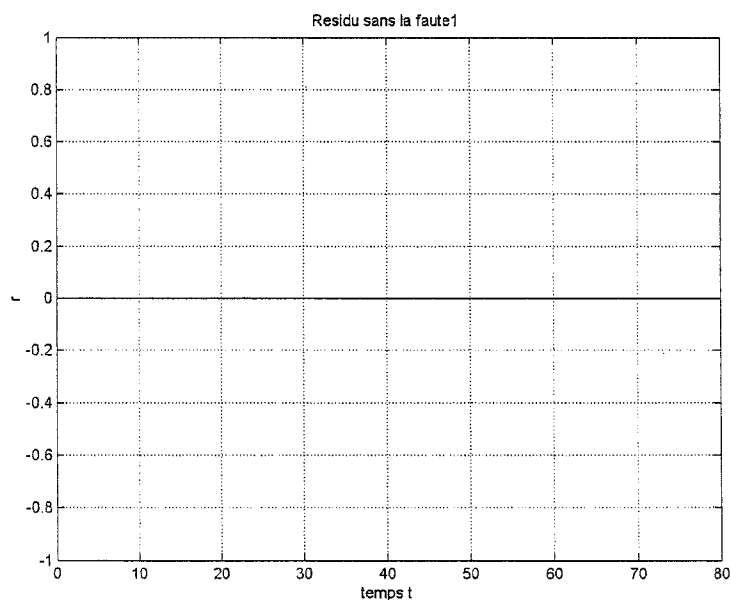


Figure 4.6 Détection et isolation de faute dans le capteur 2 - UIO-1

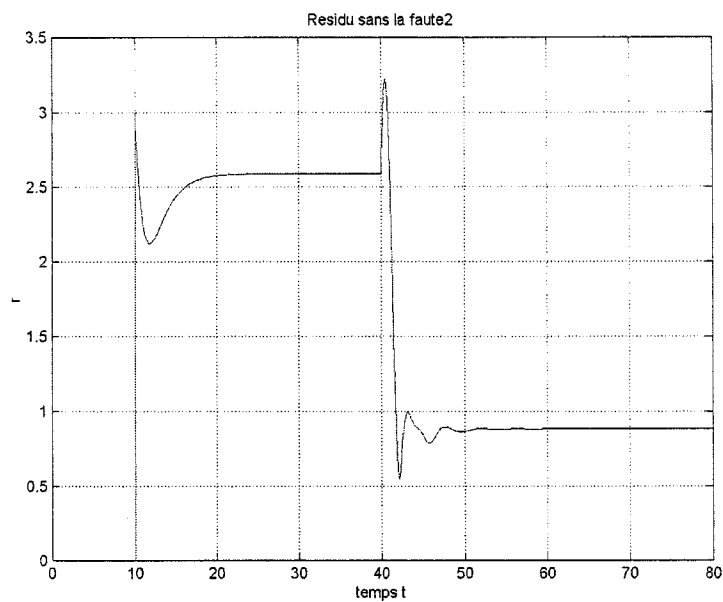


Figure 4.7 Détection et isolation de faute dans le capteur 2 - UIO-2

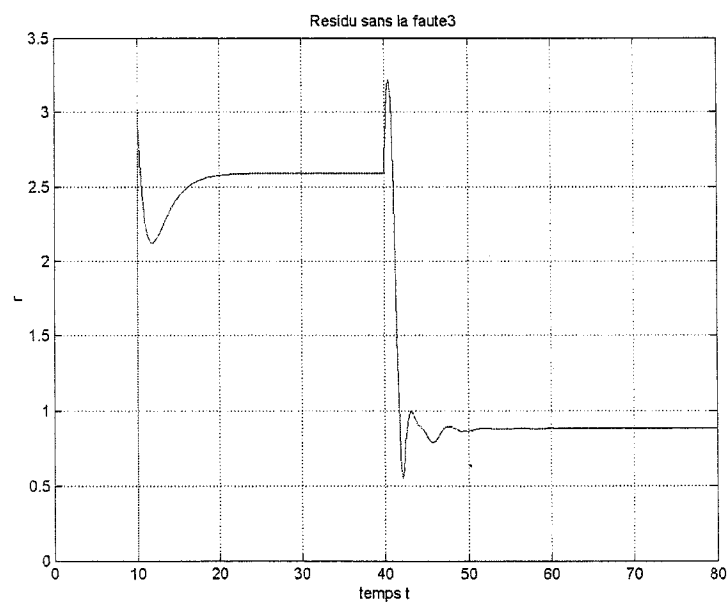


Figure 4.8 Détection et isolation de faute dans le capteur 2 - UIO-3

### 4.3.3.2 Exemple numérique d'isolation : cas de fautes sur les actionneurs

On considère un système à deux modes dont les taux de transition sont donnés par :

$$\lambda = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.3 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Les modèles dynamiques du système sont respectivement donnés par :

*Mode 1*

$$A(1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D(1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$C_y(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Mode 2

$$A(2) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D(2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$C_y(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Simulation

On suppose que le système passe du mode 1 au mode 2 à  $t = 40$  et que les fautes ont lieu au mode 2 telles que :

- la faute 1 a lieu dans l'actionneur 1 à  $t \geq 50$  avec une amplitude de 3;
- la faute 2 a lieu dans l'actionneur 2 à  $t \geq 60$  avec une amplitude de 4;
- aucune faute n'a lieu dans l'actionneur 3.

La perturbation peut être prise comme :  $w(t) = \sin(0.001x_1(t))$ .

La commande est supposée être :  $u(t) = 0$  puisqu'on n'a aucun objectif de contrôle.

L'intervalle de détection est pris comme étant  $T = 5$  périodes pour le mode 1.

L'intervalle de détection est pris comme étant  $T = 2$  périodes pour le mode 2.

D'après le théorème 4.4, les paramètres de design des 3 observateurs à entrée inconnue sont tels que chaque observateur peut détecter toutes les fautes sauf celle d'un seul actionneur. Les paramètres calculés sont :

*Mode 1: UIO-1*

$$\begin{aligned}
 H^{1*}(1) &= \begin{bmatrix} 1.1 & -0.1 \\ -1 & 1 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \\
 K_A^1(1) &= \begin{bmatrix} -0.8 & 0.6039 & 0.3 \\ -0.6039 & -0.5 & -0.6039 \\ 0.3 & 0.6039 & -0.8 \end{bmatrix} \\
 K_B^1(1) &= \begin{bmatrix} -1.21 & 1.11 \\ -0.0000 & 0 \\ 1.21 & -1.11 \end{bmatrix} \\
 U^1(1) &= \begin{bmatrix} 0 & -1.1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -0.0000 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

*UIO-2*

$$\begin{aligned}
 H^{2*}(1) &= \begin{bmatrix} 1.1111 & 0.0000 \\ -1 & 1 \\ -0.1111 & -0.0000 \end{bmatrix} \\
 K_A^2(1) &= \begin{bmatrix} -0.75 & 0.6323 & 0.25 \\ -0.6323 & -0.5 & -0.6323 \\ 0.25 & 0.6323 & -0.75 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$K_B^2(1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -0.0000 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$U^2(1) = \begin{bmatrix} -0.1111 & -1.1111 & -1.1111 \\ -0.0000 & 2 & -0.0000 \\ 0.1111 & 0.1111 & 0.1111 \end{bmatrix}$$

*UIO-3*

$$H^{3*}(1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0.0000 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_A^3(1) = \begin{bmatrix} -1.25 & 0.3664 & 0.75 \\ -0.3664 & -0.5 & 0.3664 \\ 0.75 & 0.3664 & -1.25 \end{bmatrix}$$

$$K_B^3(1) = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -0.0000 & -0.0000 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$U^2(1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -0.0000 & -0.0000 \end{bmatrix}$$

*Mode 2: UIO-1*

$$H^{1*}(2) = \begin{bmatrix} -0.1 & 1.1 \\ 1 & -1 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix}$$

$$K_A^1(2) = \begin{bmatrix} -1.3 & 0.5 & 0.8 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.8 & 0.5 & -1.3 \end{bmatrix}$$

$$K_B^1(2) = \begin{bmatrix} 1.21 & -2.31 \\ 0 & -0.0000 \\ -1.21 & 2.31 \end{bmatrix}$$

$$U^1(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.0000 & -0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

*UIO-2*

$$H^{2*}(2) = \begin{bmatrix} 0.0000 & 1.1111 \\ 1 & -1 \\ -0.0000 & -0.1111 \end{bmatrix}$$

$$K_A^2(2) = \begin{bmatrix} -1.3056 & 0.5 & 0.8056 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.8056 & 0.5 & -1.3056 \end{bmatrix}$$

$$K_B^2(2) = \begin{bmatrix} 1 & -2.2346 \\ 0 & -0.0000 \\ -1 & 2.2346 \end{bmatrix}$$

$$U^2(2) = \begin{bmatrix} -0.0000 & -1.1111 & 1 \\ 0 & -0.0000 & 0 \\ 0.0000 & 1.1111 & -1 \end{bmatrix}$$



*UIO-3*

$$\begin{aligned}
 H^{3*}(2) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0.0000 \end{bmatrix} \\
 K_A^3(2) &= \begin{bmatrix} -1.25 & 0.5 & 0.75 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.75 & 0.5 & -1.25 \end{bmatrix} \\
 K_B^3(2) &= \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -0.0000 & -0.0000 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \\
 U^3(2) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -0.0000 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

En utilisant la procédure de détection précédente, les résultats affichés sont :

une faute est détectée durant le mode 2 dans l'actionneur 1 à  $t = 50$ ;

une faute est détectée durant le mode 2 dans l'actionneur 2 à  $t = 60$ .

Ainsi, le code permet de détecter et de localiser la présence de la faute. Les courbes suivantes permettent de montrer que chaque observateur est sensible à toutes les fautes sauf une seule; par comparaison, on peut évaluer le résidu et savoir quel capteur est devenu défectueux.

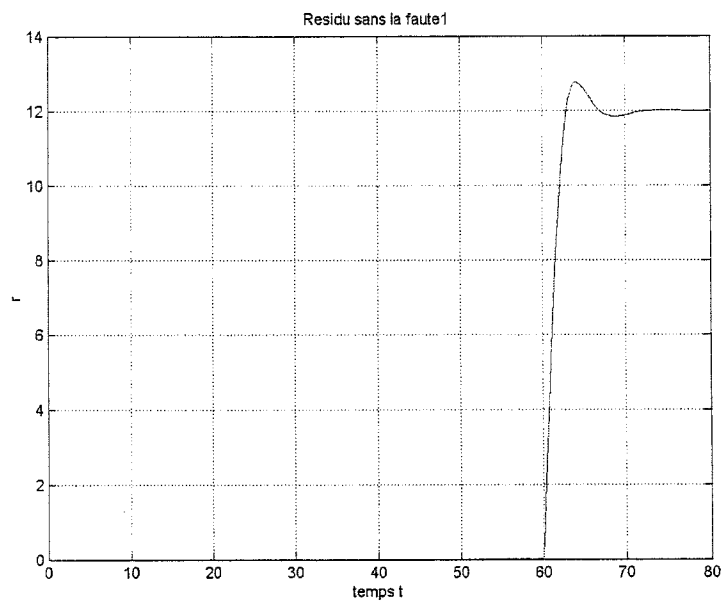


Figure 4.9 Détection et isolation de faute dans l'actionneur - UIO-1

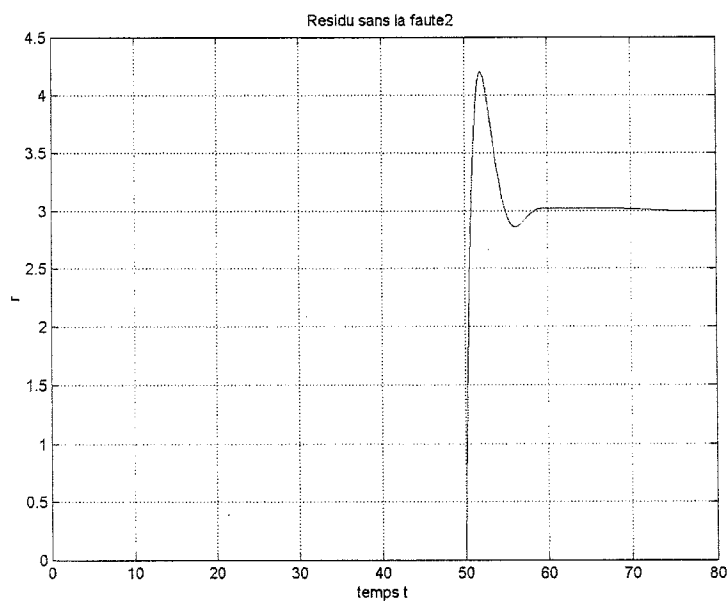


Figure 4.10 Détection et isolation de faute dans l'actionneur - UIO-2

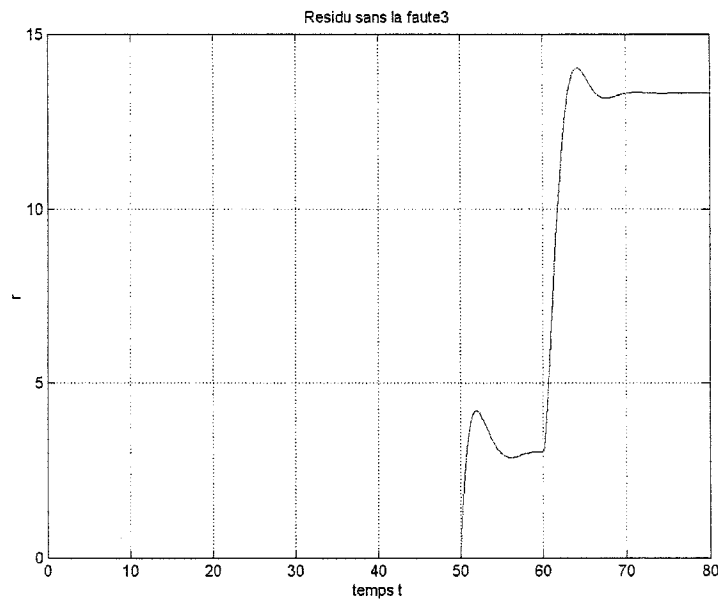


Figure 4.11 Détection et isolation de faute dans l'actionneur - UIO-3

#### 4.4 Conclusion

Comme le montrent les exemples proposés dans ce chapitre la détection et l'isolation de fautes s'effectuent correctement via des observateurs à entrée inconnue. Effectivement, considérer un observateur qui permet d'examiner la différence entre la sortie mesurée et celle estimée et qui est découplé de l'effet de toute entrée inconnue est une manière directe de détecter une seule faute. Dans le cas de fautes multiples, sensibiliser chaque observateur à un groupe de fautes sauf une seule permet de comparer l'évolution des résidus instantanément afin de détecter et de localiser la présence d'une faute. Les résultats et courbes obtenus appuient ce concept.

## CHAPITRE 5

### BILAN ET COMPARAISON DES RÉSULTATS DES DEUX APPROCHES

Jusqu'à présent, on a pu voir comment la détection et l'isolation de fautes par l'approche  $H_\infty$  puis par l'observation à entrée inconnue s'applique aux systèmes linéaires à sauts markoviens. Dans ce qui suit, on procède à une comparaison des deux approches à la lumière d'un bilan des résultats obtenus. Deux principales directions permettront de ressortir les caractéristiques de chacune des méthodes; la première étant la détection et la seconde étant l'isolation de fautes.

#### 5.1 Détection de fautes

On rappelle que la détection a pour objectif de détecter la faute affectant le système le plus tôt possible. Ici, les critères de comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes seront basés majoritairement sur les points suivants.

##### 5.1.1 Formulation de la faute dans le modèle du système défectueux

Au niveau de la détection, pour une approche comme pour l'autre, le modèle du système défectueux adopté importe peu. En effet, que l'on modélise une faute dans l'actionneur ou dans le capteur selon (3.3) ou selon (4.6), le processus de détection propre à chacune des deux méthodes reste applicable. Néanmoins, une nuance serait à noter pour la détection d'une faute dans l'actionneur selon le modèle (4.6) par un observateur à entrée inconnue. Il est possible que la faute dans certains cas

ne soit pas détectable contrairement au cas de fautes sur les capteurs où leurs effets sont directement décelables dans le résidu. En somme, la formulation de la faute dans le modèle du système défectueux n'est pas vraiment déterminante pour le choix de l'approche  $H_\infty$  ou de l'approche par l'observateur à entrée inconnue pour la détection et l'isolation de fautes dans les systèmes linéaires à sauts markoviens.

### 5.1.2 Sensibilité du résidu à la faute

L'objectif de la génération du résidu est de rendre ce dernier sensible à la faute le plus possible. Pour cela, et dans le cas d'entrées de perturbation sur le système, on devrait minimiser l'effet de ces entrées sur le résidu.

Toutefois, selon que l'entrée  $w(t)$  dans (3.3) et (4.6) soit d'énergie finie ou inconnue, on adoptera soit l'approche par  $H_\infty$  ou encore l'approche par observation inconnue. Ceci guidera la préférence de l'utilisateur pour la première ou la deuxième technique.

Néanmoins, il est important de noter que la détection de faute par la méthode de filtrage  $H_\infty$  permet d'atténuer l'effet de la perturbation sur l'erreur d'estimation dans une bande  $\gamma$  donnée ou optimale. L'estimée de la faute et donc le résidu se rapprochent de la faute réelle avec une certaine erreur.

Lorsqu'on choisit d'utiliser l'observateur à entrée inconnue pour la détection de faute, l'erreur d'estimation d'état et donc le résidu sont complètement découplés de l'effet des entrées inconnues. Ceci permet d'avoir une grande sensibilité du résidu à la faute qui agit sur le système. Les exemples suivants confirment cela.

### Cas 1 :

Supposons qu'on reprenne l'exemple numérique du paragraphe 3.4.2 avec cette fois-ci une faute sur le capteur d'amplitude 2 qui a lieu à  $t = 7$  dans le mode 1 et qui continue durant le mode 2. L'évolution du résidu ou de l'estimée de la faute dans les deux modes est représentée sur la figure 5.1.

### Cas 2 :

Supposons maintenant qu'on reprenne l'exemple numérique du paragraphe 4.3.1.2 pour lequel la faute a lieu dans le capteur à  $t = 7$  dans le mode 1 et continue durant le mode 2 avec la même amplitude 2. L'évolution du résidu dans les deux modes est donnée sur la figure 5.2.

### Cas 3 :

En considérant les mêmes conditions que dans le cas 2 mais en rajoutant cette fois-ci la possibilité que la formulation de la faute dans le capteur ressemble à ce qui suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(s(t))x(t) + B(s(t))u(t) + D(s(t))w(t) + B(s(t))f(t) \\ y(t) = Cx(t) + f(t) \end{cases}$$

la faute survient à  $t = 7$  dans le mode 1 et continue durant le mode 2 avec une amplitude de 2. La représentation du résidu est donnée sur la figure 5.3.

On remarque donc d'après ces courbes que pour la détection par le filtrage  $H_\infty$ , on arrive à estimer la faute de manière satisfaisante. Néanmoins, l'erreur d'estimation n'est pas nulle, ce qui veut dire que le résidu est sensible à la faute mais avec un certain biais. Quant à la détection par l'observateur à entrée inconnue, on remarque que la sensibilité est plus grande dans les deux cas traités. En effet, dans le résidu, seul l'effet de la faute est transmis. On peut d'ailleurs le constater par la présence d'une entrée inconnue d'amplitude potentiellement grande mais dont l'effet sur le

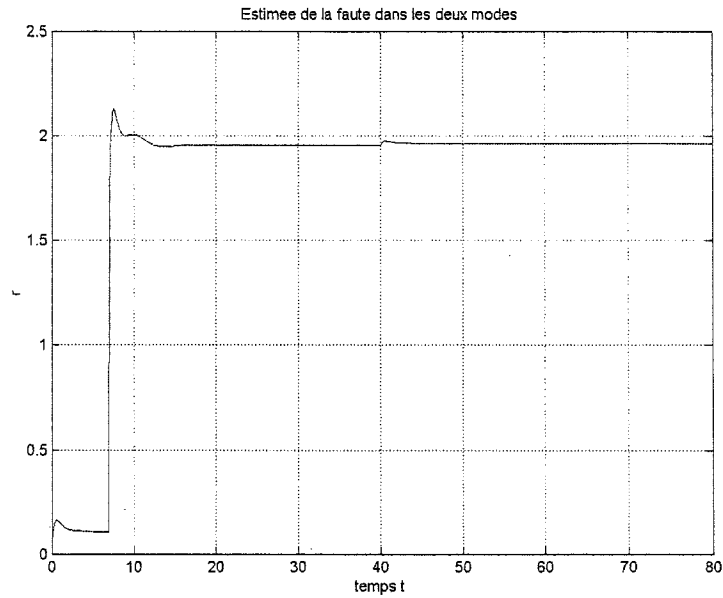


Figure 5.1 Détection d'une faute par filtrage  $H_\infty$

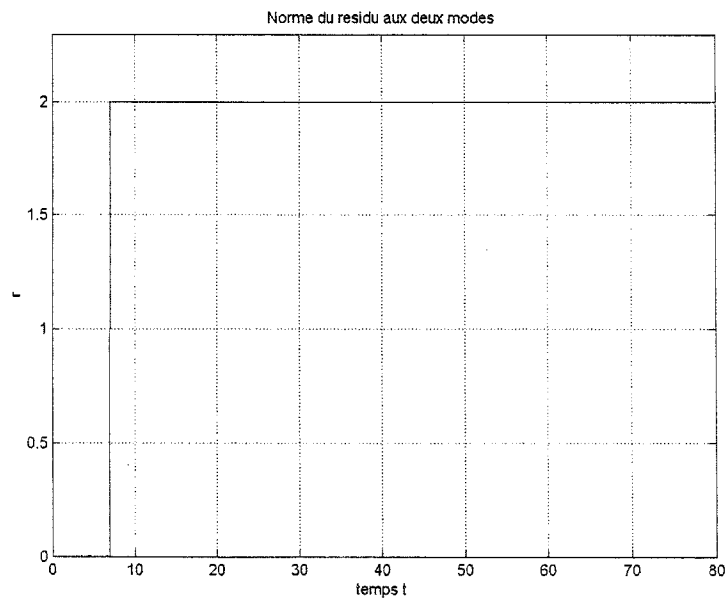


Figure 5.2 Détection d'une faute par un observateur à entrée inconnue-1

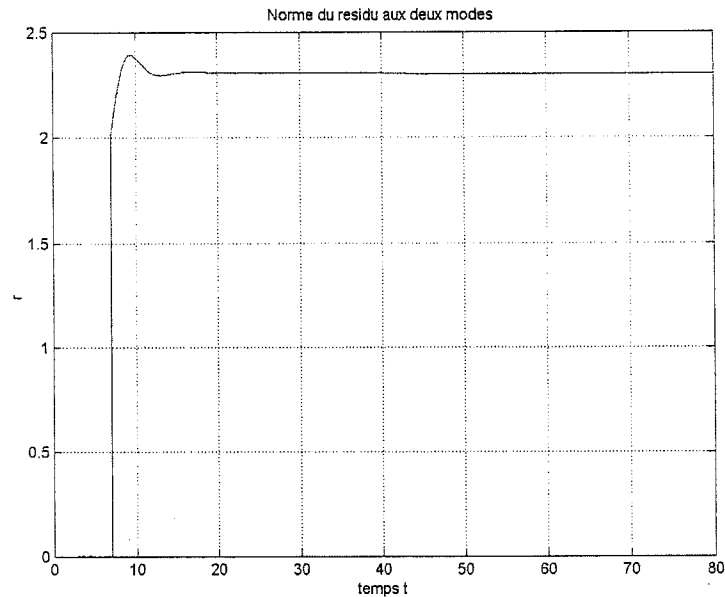


Figure 5.3 Détection d'une faute par un observateur à entrée inconnue-2

résidu est nul. Ce dernier n'est différent de zéro que lorsque la faute est présente. Pour les deux cas, la valeur de la norme du résidu est au moins égale à celle de la faute. Néanmoins, pour le type de faute (abrupte) qu'on considère, cette différence de sensibilité d'une méthode à l'autre n'est pas cruciale.

### 5.1.3 Évaluation du résidu

Comme on l'a vu précédemment, l'évaluation permet d'avoir de l'information à partir du résidu sur la présence d'une faute le plus tôt possible. Dans le cas de la détection, le résidu généré par les deux méthodes est évalué en le comparant à un seuil de détection  $J_{th}$ . Les fautes sont détectées à l'instant exact où elles ont lieu et il n'y a pratiquement aucune différence entre les deux techniques à ce propos.



## 5.2 Isolation de fautes

L'isolation de fautes consiste comme on le sait à localiser les fautes d'intérêt par la génération de résidus partiels. La comparaison des deux méthodes adoptées dans ce cas se fera sur la base des critères suivants.

### 5.2.1 Formulation de la faute dans le modèle du système défectueux

L'isolation de fautes par filtrage  $H_\infty$  est basée sur l'estimation du vecteur faute puis l'évaluation de chacune de ses composantes pour identifier et localiser chaque faute agissant sur le système à l'instant où elle a lieu. Selon la formulation du vecteur faute dans le modèle, on peut simuler une multitude de cas de défectuosité; plusieurs fautes sur les capteurs, plusieurs fautes sur les actionneurs, plusieurs fautes sur les capteurs et les actionneurs à la fois.

L'isolation de fautes par l'observateur à entrée inconnue se fait en sensibilisant le résidu à un groupe de fautes tout en le maintenant insensible à une faute dans un actionneur ou un capteur donné. Néanmoins, une restriction est imposée par la méthode proposée dans le traitement des fautes multiples. En effet, lorsqu'on a plusieurs fautes sur les capteurs, on suppose, pour une commodité de génération des résidus structurés, que les actionneurs ne sont pas défectueux et vice versa.

### 5.2.2 Évaluation du résidu

Dans cette étude, l'évaluation du résidu est le reflet de la méthode de structuration du résidu partiel. En effet, pour la procédure qui utilise le filtrage  $H_\infty$ , chacune des composante de l'estimée de la faute (résidu) est comparée au seuil qui correspond

à la norme du résidu généré par le système dans un état fiable.

Pour la procédure faisant intervenir l'observateur à entrée inconnue et vu que le résidu structuré est sensible à toutes les fautes sauf une seule, l'évaluation se fait en formant des quantités résiduelles que l'on compare à deux instants successifs sur un intervalle de détection donné. Dès qu'une déviation notable est décelée, on est informé sur la présence d'une faute. Au fait, dans ce raisonnement, on traduit le fait que l'absence d'une faute entraîne l'absence de son effet sur un résidu structuré généré et vice versa.

### 5.3 Conclusion

Le présent chapitre fait un bilan des principaux résultats obtenus et ressort les points de similitude ou de différence entre les deux méthodes de détection et d'isolation de fautes utilisées.

Il est possible de choisir l'une ou l'autre des méthodes en se basant sur les critères indicateurs exposés ci-dessus. Ces critères, comme on vient de le voir, vont dépendre aussi du fait que l'on veuille faire de la détection ou de l'isolation de fautes. On notera par ailleurs que quelle que soit la méthode choisie, le temps de détection ou d'isolation d'une faute donnée est bien précis.

## CHAPITRE 6

### CONCLUSION ET EXTENSIONS POSSIBLES

Dans le présent travail, il a été question du problème de détection et d'isolation de fautes dans les systèmes linéaires à sauts markoviens. Comme ces systèmes ont la principale particularité de passer d'un mode linéaire à un autre suivant des taux de transition bien spécifiques, on ne pourrait les traiter comme de simples systèmes linéaires. En effet, le modèle peut changer subitement de propriétés pour une raison connue ou inconnue et tous les paramètres ajustés pour le mode initial ne sont plus valables pour le mode courant. En exprimant les relations - en termes de taux de transition- entre le modèle d'un mode donné et celui d'un autre, on se ramène à une structure plus susceptible de décrire ces changements aléatoires.

Des systèmes aux propriétés variables de la sorte peuvent en plus devenir défectueux durant un fonctionnement normal que ce soit en boucle ouverte ou fermée. Ainsi, des composantes comme des actionneurs ou des capteurs peuvent provoquer une anomalie de fonctionnement à tout moment. La faute intervient donc comme une entrée inconnue sur le modèle à caractère stochastique. Pour des systèmes linéaires déterministes, et tel qu'on l'a vu dans le survol de littérature, plusieurs méthodes existent pour détecter et isoler des fautes qui peuvent y survenir.

Dans notre cas et puisque précisément une faute est considérée comme une entrée inconnue, on utilise deux approches pour la détection et l'isolation de fautes dans les systèmes linéaires à sauts markoviens. Une première approche est celle du filtrage  $H_\infty$  et une seconde approche est celle utilisant un observateur à entrée inconnue.

L'approche par filtrage  $H_\infty$  consiste principalement à estimer le vecteur faute qui est considéré comme une entrée inconnue à énergie finie pouvant affecter des actionneurs ou bien des capteurs. Cette estimée est définie comme étant le résidu généré par le filtre  $H_\infty$ . L'évaluation de ce résidu dans sa globalité par rapport à un seuil de détection permet de conclure dans le cas où le seuil est dépassé sur l'existence d'une faute. Cette étape est l'étape de détection qui consiste seulement à voir si une faute quelconque a eu lieu.

L'exemple numérique considéré à ce niveau, qui traite d'un système linéaire à sauts markoviens avec une faute apparaissant au capteur, permet d'estimer la faute de manière satisfaisante et le code considéré permet de détecter la faute à l'instant exact où elle a lieu.

Pour pouvoir localiser une faute, le principe est de définir des résidus partiels qui sont liés directement à la faute et qui informent ainsi sur sa présence. En effet, lorsqu'on estime un vecteur faute, chacune de ses composantes est prise comme étant un résidu partiel. Pour isoler une faute, il suffit de comparer la norme du résidu ainsi calculé à un seuil. Les exemples numériques traités pour les cas de fautes sur des actionneurs ou/et sur des capteurs permettent de montrer que d'une part l'estimation est correctement effectuée et d'autre part que les résidus partiels obtenus informent bien sur la présence d'une faute à un endroit donné. L'étape d'isolation est donc bien réalisée par cette approche de filtrage  $H_\infty$ .

Tel que mentionné précédemment, une seconde orientation a été l'application d'un observateur à entrée inconnue à la détection et l'isolation de fautes dans les systèmes

linéaires à sauts markoviens. Ce type d'observateurs consiste à estimer l'état d'un système en *ignorant* toutes les entrées inconnues qui peuvent y survenir. L'erreur d'estimation ainsi formée est robuste aux entrées inconnues telles que des erreurs sur le modèle ou des incertitudes. Le résidu ainsi formé est sensible aux fautes et est robuste aux entrées inconnues.

La détection est basée comme pour le cas du filtrage  $H_\infty$  sur la comparaison du résidu à un seuil de détection. Lorsque la norme du résidu dépasse ce seuil, une faute est détectée. L'exemple numérique traité montre bien que la faute au niveau d'un capteur est détectée à l'instant où elle a lieu. L'isolation par contre est basée sur la sensibilisation du résidu aux fautes dans tous les capteurs ou les actionneurs sauf un seul. La détection d'une faute et son isolation s'effectuent en comparant des différences résiduelles décalées d'une période de temps sur une fenêtre temporelle choisie. Les résultats obtenus pour des exemples numériques de fautes sur des capteurs puis des actionneurs mettent en évidence la capacité du code à localiser des fautes à l'endroit et à l'instant exact où elles ont lieu.

Bien qu'utilisant des techniques de modélisation légèrement différentes, les deux approches adoptées pour la détection et l'isolation des fautes dans les systèmes linéaires à sauts markoviens se révèlent efficaces et satisfaisantes. Elles s'avèrent tout à fait adaptées pour des cas de fautes multiples sur des actionneurs et des capteurs. Néanmoins, il est important de noter que de part les modèles adoptés dans chacune des approches, une restriction supplémentaire sur les fautes existe lorsqu'on fait appel à des observateurs à entrée inconnue. En effet, dans le cas du filtrage  $H_\infty$ , on a la possibilité de traiter des cas de systèmes avec des fautes pouvant affecter des actionneurs et des capteurs à la fois. À l'opposé, ici avec un observateur à entrée inconnue, traiter des fautes sur les capteurs suppose qu'aucun

actionneur n'est défectueux et vice versa. En réalité, ceci est difficile à réaliser car les fautes apparaissant dans un composant sont le plus souvent à caractère aléatoire.

Par ailleurs, tandis que l'observation à entrée inconnue est capable de découpler complètement l'erreur d'estimation et donc le résidu des entrées inconnues, le filtrage  $H_\infty$  ne peut qu'assurer que l'erreur d'estimation de la faute est minimisée dans une bande réduite qui tient compte des perturbations et d'autres entrées agissant sur le système.

Bien qu'ayant atteint les objectifs fixés au départ, il n'en reste pas moins que des extensions sont toujours possibles. En effet, on s'est axé dans ce travail sur la considération de fautes abruptes, une autre possibilité serait de détecter des fautes naissantes qui sont insignifiantes au début mais qui peuvent causer de graves dommages à long terme. Pouvoir détecter ces fautes assez tôt est un objectif intéressant à atteindre pour augmenter la fiabilité d'un système.

D'un autre côté, cette étude, bien que destinée à des applications plus réelles, s'est plus axée sur le développement de concepts théoriques dont la vérification s'est basée sur des exemples numériques inspirés de la littérature. Il serait donc intéressant de tester l'applicabilité de cette théorie, sinon sur des systèmes industriels, sur des modèles disponibles de systèmes hybrides types.

## RÉFÉRENCES

- AMATO F. et al 2002, "A Nonlinear UIO Scheme for the FDI on a Small Commercial Aircraft", *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Control Applications*, 235-240.
- BASSEVILLE M. 1997, "Information Criteria for Residual Generation and Fault Detection and Isolation", *Automatica*, 33(5), 783-803.
- BASSEVILLE M. 1998, "On-board Component Fault Detection and Isolation Using the Statistical Local Approach", *Automatica*, 34(11), 1391-1415.
- BESANÇON G. 2003, "High-gain Observation with Disturbance Attenuation and Application to Robust Fault Detection", *Automatica*, 39, 1095-1102.
- BOKOR J. and BALAS G. 2004, "Detection Filters for LPV Systems - a Geometric Approach", *Automatica*, 40, 511-518.
- BOUKAS E.K. and LIU Z.K. 2002, *Deterministic and Stochastic Time Delay Systems*, Birkhauser, Boston.
- BOUKAS E.K. 2004, *Stochastic Switching Systems: Analysis and Design*, Birkhauser, Boston.
- CAMPA G. et al 2002, "On-line Learning Neural Networks for Sensor Validation for the Flight Control System of a B777 Research Scale Model", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12, 987-1007.
- CHAN C. W., JIN H., Cheung K. C. and Zhang H. Y. 2001, "Fault Detection of Systems with Redundant Sensors using Constrained Kohonen Networks", *Automatica*, 37, 1671-1676.

CHEN J., PATTON R.J. and ZHANG H.Y. (1996), "Design of Unknown Input Observers and Robust Fault Detection Filters", *International Journal of Control*, 63(1), 85-105.

CHEN J. and PATTON R.J. 1999, *Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*, Kluwer Academic Publishers, Boston.

CHEN R. H., MINGORI D. L. and SPEYER J. L. 2003, "Optimal Stochastic Fault Detection Filter", *Automatica*, 39, 377-390.

CHOW E.Y. and WILLSKY A.S. 1984, "Analytical Redundancy and the Design of Robust Failure Detection Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-29(7), 603-614.

CORDIER M.O. 1998, "Diagnostic", *RJCIA'98*, IRISA/Univ. Rennes 1.

DARKHOVSKI B. and STAROSWIECKI 2003, "A Game Theoretic Approach to Decision in FDI", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(5), 853-858.

DAROUACH M. 1994, "On the Novel Approach to the Design of Unknown Input Observers", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(3), 698-699.

DING X., GUO L. and JEINSCH T. 1999, "A Characterization of Parity Space and its Application to Robust Fault Detection", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(2), 337-343.

EDELMAYER A., BOKOR J., SZIGETI F. and KEVICZKY L. 1997, "Robust Fault Detection in the Presence of Time-Varying System Perturbations", *Automatica*, 33(3), 471-475.

EDELMAYER A. and BOKOR J. 2002, "Optimal  $H_\infty$  Scaling for Sensitivity Optimization of Detection Filters", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12, 749-760.



FRANK P.M. and DING X. 1997, "Survey of Robust Residual Generation and Evaluation Methods in Observer-Based Fault Detection Systems", *Journal of Process Control*, 7, 6, 403-424.

GERTLER J. J. 1988, "Survey of Model-Based Failure Detection and Isolation in Complex Plants", *IEEE Control Systems Magazine*, 8(6), 3-11.

GERTLER J. J. and MONAJEMY R. 1995, "Generating Directional Residuals with Dynamic Parity Relations", *Automatica*, 31(4), 627-635.

GERTLER J. J. 2002, "All Linear Methods are Equal- and Extendible to Some Nonlinearities", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12, 629-648.

HAMMOURI H., KINNAERT M. and EL YAAGOUBI E.H. 1999, "Observer-based Approach to Fault Detection and Isolation for Nonlinear Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(10), 1879-1884.

HAMMOURI H., KABORE P. and KINNAERT M. 2001, "A Geometric Approach to Fault Detection and Isolation for Bilinear Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(9), 1451-1455.

HOU M. and MULLER P.C. 1994, "Fault Detection and Isolation Observers", *International Journal of Control*, 60(5), 827-846.

HOU M. and MULLER P.C. 1994, "Disturbance Decoupled Observer", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(6), 1338-1341.

ISERMANN R. 1984, "Process Fault-Detection Based on Modelling and Estimation Methods-a Survey", *Control Engineering Practice*, 5(5), 639-652.

ISERMANN R. 1997, "Supervision, Fault-Detection and Fault-Diagnosis Methods - An Introduction", *Automatica*, 20(4), 387-404.

KELLER J.Y., SUMMERER L. and DAROUACH M. 1995, "Robust Failure Detection from the Generalized Likelihood Ratio Test", *Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control*, New Orleans, LA.

KELLER J.Y. and DAROUACH M. 1998, "Fault Isolation Filter Design for Linear Stochastic Systems with Unknown Inputs", *Proceedings of the 37th Conference on Decision & Control*, Tampa, Floride.

KUDVA P., VISWANADHAM N. and Ramakrishna A. 1980, "Observers for Linear Systems with Unknown Inputs", *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-25(1), 113-115.

MAHMOUD M., JIANG J. and ZHANG Y. 2001, "Stochastic Stability Analysis of Fault-Tolerant Control Systems in the Presence of Noise", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(11), 1810-1811.

MAHMOUD M. M. 2001, Stochastic Analysis and Synthesis of Active Fault Tolerant Control Systems, Thèse PhD de l'Université de Western Ontario.

MARCOS M., SUBHABRATA G. and BALAS G. J., "An Application of  $H_\infty$  Fault Detection and Isolation to a Transport Aircraft", *Control Engineering Practice*, doi: 10.1016/j.conengprac.2004.02.006.

MEDVEDEV A. 1995, "Fault Detection and Isolation by a Continuous Parity Space Method", *Automatica*, 31(7), 1039-1044.

NIEMANN H. et Al, 1999, "Exact, Almost and Delayed Fault Detection : An Observer Based Approach", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 9, 215-238.

PARLANGELI G. and VALCHER M.E. 2003, "Optimal Filtering, Fault Detection and Isolation for Linear Discrete-Time Systems in a Noisy Environment", *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 17, 729-750.

- PATTON R.J. and HOU M. 1995, " $H_\infty$  Estimation and Robust Fault Detection", *European Control Conference*.
- PATTON R.J. and CHEN J. 1997, "Observer-Based Fault Detection and Isolation: Robustness and application", *Control Engineering Practice*, 5(5), 671-682.
- PATTON R.J. and HOU M. 1998, "Design of Fault Detection and Isolation Observers: A Matrix Pencil Approach", *Automatica*, 34(9), 1135-1140.
- PATTON R.J. and CHEN J. 2000, "On Eigenstructure Assignment for Robust Fault Diagnosis", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 10, 1193-1208.
- RAMBEAUX F., HAMELIN F and SAUTER D. 2000, "Optimal Thresholding for Robust Detection of Uncertain Systems", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 10, 1155-1173.
- SABERI A., STOORVOGEL A.A. and SANNUTI P. 1999, "Inverse Filtering and Deconvolution", *Proceedings of the American Control Conference*, 3270-3274.
- SABERI A. et al 2000, "Fundamental Problems in Fault Detection and Identification", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 10, 1209-1236.
- SADRNIA M.A., PATTON R.J. and HOU M. 1995, "Robust  $H_\infty/\mu$  Fault Diagnosis Observer Design", *European Control Conference*
- SAUTER D. and HAMELIN F. 1999, "Frequency-Domain Optimization for Robust Fault Detection and Isolation in Dynamic Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(4), 878-882.
- SHEN L.C. and HSU P.L. 1998, "Robust Design of Fault Isolation Observers", *Automatica*, 34(11), 1421-1429.

- SIMANI S. 1999, Model-Based Fault Diagnosis in Dynamic Systems using Identification Techniques, Thèse Ph.D. Département d'Ingénierie de l'Université de Ferrara, Italie, Novembre, 1999.
- STAROSWIECKI M. and COMTET-VARGA G. 2001, "Analytical Redundancy Relations for Fault Detection and Isolation in Algebraic Dynamic Systems", *Automatica*, 37, 687-699.
- TAN C.H. and EDWARDS C. 2003, "Sliding Mode Observers for Robust Detection and Reconstruction of Actuator and Sensor Faults", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13, 443-463.
- TERRA H. M., TINOS R. 2001, "Fault Detection and Isolation in Robotic Manipulators via Neural Networks: A Comparison among Three Architectures for Residual Analysis", *Journal of Robotic Systems*, 18(7), 357-374.
- TRINH H. and HA Q. 2000, "Design of Linear Functional Observers for Linear Systems with Unknown Inputs", *International Journal of Systems Sciences*, 31(6), 741-749.
- TZE-THONG C. and MILTON B. A. 1976, "A Sequential Failure Detection Technique and its Application", *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- WATANABE K. and HIMMELBLAU D. M. 1983, "Fault Diagnosis in Nonlinear Chemical Process: Parts I and II", *AIChE Journal*, 29(2), 243-260.
- WILLSKY A. L. and JONES H. L. 1976, "A Generalized Likelihood Ratio Approach to the Detection and Estimation of Jumps in Linear Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- XIONG Y. and SAIF M., "Unknown Disturbance Inputs Estimation Based on a State Functional Observer Design", *Automatica*, 39, 1389-1398.

YANG H. and M. SAIF 1998, "Observer Design and Fault Diagnosis for State-Retarded Dynamical Systems", *Automatica*, 34(2), 217-227.

ZHANG Q., BASSEVILLE M. and BENEVISTE A. 1998, "Fault Detection and Isolation in Nonlinear Dynamic Systems: A Combined Input-Output and Local Approach", *Automatica*, 34(11), 1359-1373.

ZHENGANG H., WEIHUA L. and SIRISH L. S. 2004, "Fault Detection and Isolation in Presence of Process Uncertainties", *Control Engineering Practice*, DOI:10.1016/j.conengprac.2004.04.020

ZHONG M., DING S.X. and BONGYONG T. 2002, "An LMI Approach to Design Robust Fault Detection Observers", *Proceedings of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation*, 2705-2709.

ZHONG M., DING S.X., LAMJ. and WANG H. 2003, "An LMI Approach to Design Robust Fault Detection Filter for Uncertain Systems", *Automatica*, 39, 543-550.

## ANNEXE I

## STABILITÉ STOCHASTIQUE

## I.1 Démonstration du théorème 3.1

*Condition nécessaire* : triviale,

*Condition suffisante* :

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(x(t), i) = x^T(t)P(i)x(t)$$

où :  $P(i)$  est une matrice symétrique et définie-positive pour tout mode  $i \in S$ .

Supposons que  $L$  dénote le générateur infinitésimal du processus de Markov  $(x(t), i)$ .

Son expression est donnée par :

$$\begin{aligned} LV(x(t), i) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E[V(x(t+h), s(t+h)) | x(t) = x(t), s(t) = i] - V(x(t), i)}{h} \\ &= \dot{x}^T(t)P(s(t))x(t) + x^T(t)P(s(t))\dot{x}(t) + \sum_{j=1}^N \lambda_{s(t)j} x^T(t)P(j)x(t) \\ &= x^T(t)A^T(s(t))P(s(t))x(t) + x^T(t)P(s(t))A(s(t))x(t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \lambda_{s(t)j} x^T(t)P(j)x(t) \\ &= x^T(t) \left[ A^T(s(t))P(s(t)) + P(s(t))A(s(t)) + \sum_{j=1}^N \lambda_{s(t)j} P(j) \right] x(t) \end{aligned}$$

On pose :

$$\Omega_n(s(t)) = A^T(s(t))P(s(t)) + P(s(t))A(s(t)) + \sum_{j=1}^N \lambda_{s(t)j} P(j)$$

En utilisant la condition (3.2), on obtient :

$$\begin{aligned} LV(x(t), s(t)) &= x^T(t) \Omega_n(s(t)) x(t) \\ &\leq -\min_{i \in S} \{ \lambda_{\min}(-\Omega_n(i)) \} x^T(t) x(t) \end{aligned}$$

En combinant ceci avec la formule de Dynkin, on aboutit à :

$$\begin{aligned} E[V(x(t), s(t)) - E[V(x(0), s(0))]] &= E \left[ \int_0^t LV(x(\tau), s(\tau)) d\tau | (x(0), s(0)) \right] \\ &\leq -\min_{\lambda_{\min}(-\Omega_n(i))} E \left[ \int_0^t x^T(\tau) x(\tau) d\tau | (x(0), s(0)) \right] \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} \min_{\lambda_{\min}(-\Omega_n(i))} E \left[ \int_0^t x^T(\tau) x(\tau) d\tau | (x(0), s(0)) \right] \\ \leq E[V(x(0), s(0))] - E[V(x(t), s(t))] \\ \leq E[V(x(0), s(0))] \end{aligned}$$

Ainsi :

$$E \left[ \int_0^t x^T(\tau) x(\tau) d\tau | (x(0), s(0)) \right] \leq \frac{E[V(x(0), s(0))]}{\min_{i \in S} \{ \lambda_{\min}(-\Omega_n(i)) \}}$$

est vraie pour tout  $t > 0$ . Pour  $t$  allant vers l'infini :

$$E \left[ \int_0^t x^T(\tau) x(\tau) d\tau | (x(0), s(0)) \right]$$

est bornée par une constante  $T(x(0), r(0))$  donnée par :

$$\frac{E[V(x(0), s(0))]}{\min_{i \in S} \{\lambda_{\min}(-\Omega_n(i))\}}$$

ce qui démontre le théorème 3.1